УДК 517.51, 517.9

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЙ КОШИ-РИМАНА

Н. А. Швемлер, Т. Г. Латфуллин

ON INVARIANCE OF THE GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN EQUATIONS

N. A. Shvemler, T. G. Latfullin

Рассматриваются отображения класса C^1 областей пространства R^2, удовлетворяющие обобщенной системе уравнений Коши-Римана. Найдены достаточные условия замкнутости класса таких отображений относительно операций сложения, суперпозиции и обратного отображения. Во второй части статьи найдены условия, при которых существуют отображения, удовлетворяющие обобщенным условиям Коши-Римана с наперед заданной матрицей коэффициентов системы.

The C^1 class of mappings domains in R^2, satisfying the system of generalized Cauchy-Riemann equations is considered. Sufficient conditions for the closure of this class relative to the operations of addition, superposition and reverse mapping were found. The second part of the paper introduces the found conditions for which there are maps that satisfy the generalized Cauchy-Riemann system with a given coefficient matrix of the system.

Ключевые слова: условия Коши-Римана, обобщенная система Коши-Римана, свойства решений обобщенной системы Коши-Римана.

Keywords: Cauchy-Riemann equations, generalized Cauchy-Riemann equations, properties of generalized Cauchy-Riemann equations.

Введение

Пусть G – область в R^2. Для заданной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

обозначим через $CR_p^2 = CR_p^2(A)$ класс непрерывно-дифференцируемых отображений

$f: G \to R^2,\ f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$,

частные производные координатных функций которых удовлетворяют обобщенным условиям Коши-Римана:

$$\begin{gathered} a_{11}u_x + a_{12}u_y + a_{13}v_x + a_{14}v_y = 0 \\ a_{21}u_x + a_{22}u_y + a_{23}v_x + a_{24}v_y = 0 \\ \dots \\ a_{p1}u_x + a_{p2}u_y + a_{p3}v_x + a_{p4}v_y = 0. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь a_{ij} – действительные постоянные, p – количество уравнений, а u_x, u_y, v_x, v_y – частные производные по соответствующим переменным. Имеет смысл рассматривать обобщенные условия Коши-Римана лишь в том случае, когда ранг матрицы (1) равен количеству строк и $p < 4$, иначе единственное решение системы (2) будет нулевым.

Предметом исследования в статье служат отображения, удовлетворяющие обобщенной системе уравнений Коши-Римана. Ранние работы по этой тематике восходят к авторам [1; 4 – 6]. В статьях [2; 3] найдены ответы на вопросы: когда такие отображения являются отображениями с ограниченным искажением; какими свойствами должна обладать матрица коэффициентов, чтобы обобщенная система уравнений Коши-Римана имела только линейные решения.

1. Условия замкнутости класса $\mathbf{CR}_2^2$

В этой части всюду будем считать, что

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

и $g(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$

из класса $CR_2^2 = CR_2^2(B)$ с матрицей коэффициентов:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.. \qquad (3)$$

Утверждение 1. При любых значениях элементов матрицы B алгебраическая сумма f(x,y) + g(x,y) отображений f(x,y) и g(x,y) принадлежит классу $CR_2^2(B)$.

► Так как отображения f(x,y) и g(x,y) удовлетворяют одной и той же обобщенной системе Коши-Римана, то

$$\begin{gathered} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y + \alpha_3 v_x + \alpha_4 v_y = 0, \\ \beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 v_x + \beta_4 v_y = 0 \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 q_x + \alpha_4 q_y = 0, \\ \beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 q_x + \beta_4 q_y = 0. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &f(x,y) + g(x,y) = \\ &= (u(x,y) + p(x,y), v(x,y) + q(x,y)) \end{aligned} \qquad (4)$$

будет удовлетворять следующей системе:

$$\alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y + \alpha_3 v_x + \alpha_4 v_y +$$
$$+\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 q_x + \alpha_4 q_y = 0,$$
$$\beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 v_x + \beta_4 v_y +$$
$$+\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 q_x + \beta_4 q_y = 0.$$

После перегруппировки слагаемых

$$\alpha_1 (u+p)_x + \alpha_2 (u+p)_y +$$
$$+\alpha_3 (v+q)_x + \alpha_4 (v+q)_y = 0,$$
$$\beta_1 (u+p)_x + \beta_2 (u+p)_y +$$
$$+\beta_3 (v+q)_x + \beta_4 (v+q)_y = 0$$

получим систему Коши-Римана для отображения (4). ◄

Утверждение 2. Если выполнено одно из следующих условий на коэффициенты:

1. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_3$, $\beta_4 = 0$;

2. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_3$, $\alpha_4 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$, $\beta_4 = 0$;

тогда суперпозиция $f \circ g$ отображений f и g принадлежит классу $CR_2^2(B)$.

► После преобразования методом Гаусса матрицы коэффициентов (3) можно прийти к одному из трех возможных вариантов:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m_3 & m_4 \\ 0 & 1 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} m_1 & 1 & 0 & m_4 \\ n_1 & 0 & 1 & n_4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & m_2 & 0 & m_4 \\ 0 & n_2 & 1 & n_4 \end{pmatrix}$.

Остальные случаи, с учетом равноправия координатных функций и с точностью до перестановки строк, будут равносильными.

Координатные функции U и V отображения $f \circ g$ примут вид:

$$U(x,y) = u\big(p(x,y), q(x,y)\big),$$
$$V(x,y) = v\big(p(x,y), q(x,y)\big).$$

Значит,

$$\begin{aligned} U_x &= u_x p_x + u_y q_x \\ U_y &= u_x p_y + u_y q_y \\ V_x &= v_x p_x + v_y q_x \\ V_y &= v_x p_y + v_y q_y. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим случай (a), которому соответствуют равенства:

$$\begin{aligned} p_x &= -m_3 q_x - m_4 q_y, \\ p_y &= -n_3 q_x - n_4 q_y. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) получим:

$$\begin{aligned} U_x &= -m_3 u_x q_x - m_4 u_x q_y + u_y q_x, \\ U_y &= -n_3 u_x q_x - n_4 u_x q_y + u_y q_y, \\ V_x &= -m_3 v_x q_x - m_4 v_x q_y + v_y q_x, \\ V_y &= -n_3 v_x q_x - n_4 v_x q_y + v_y q_y.. \end{aligned} \tag{7}$$

Учитывая (a), получим систему, которая после перегруппировки слагаемых примет вид:

$$q_x\left(-m_3 u_x + u_y + \left(-m_3^2 - m_4 n_3\right) v_x + m_3 v_y\right) +$$
$$+q_y\left(-m_4 u_x + \left(-m_3 m_4 - m_4 n_4\right) v_x + n_4 v_y\right) = 0,$$
$$q_x\left(-n_3 u_x + \left(-n_3 m_3 - n_4 n_3\right) v_x + n_3 v_y\right) +$$
$$+q_y\left(-n_4 u_x + u_y + \left(-n_3 m_4 - n_4^2\right) v_x + n_4 v_y\right) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при частных производных координатных функций отображения $\mathbf{f}$ к соответствующим коэффициентам матрицы (a), приходим к двум системам:

$$\begin{cases} -m_3 = 0 \\ -m_3^2 - m_4 n_3 = n_3 \\ m_3 = n_4 \\ -m_4 = 1 \\ -m_3 m_4 - m_4 n_4 = n_3 \\ n_4 = n_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -n_3 = 1 \\ -n_3 m_3 - n_4 n_3 = m_3 \\ n_3 = m_4 \\ -n_4 = 0 \\ -n_3 m_4 - n_4^2 = n_3 \\ n_4 = n_4 \end{cases}$$

разрешая которые находим коэффициенты соответствующие условиям 1, 2 доказываемого утверждения.

В случае (b), проделав аналогичные действия, получим уравнения:

$$\mathbf{m}_3 = 0,\ \mathbf{m}_4 = -1,\ \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3,\ \mathbf{n}_4 = 0, \tag{8.1}$$
$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_3,\ \mathbf{m}_4 = -1,\ \mathbf{n}_3 = -1,\ \mathbf{n}_4 = 0. \tag{8.2}$$

$$p_x\left(-m_1 n_1 u_y - m_1 m_4 v_x\right) +$$
$$+q_y\left(-m_4 u_x + \left(1 - m_1 n_4\right) u_y - m_4^2 v_x + m_4 v_y\right) = 0,$$
$$p_x\left(n_1 u_x - n_1^2 u_y + \left(1 - m_1 n_4\right) v_x - n_1 v_y\right) +$$
$$+q_y\left(-n_1 n_4 u_y - m_4 n_4 v_x\right) = 0$$

и соответствующие им условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} m_1n_1=-1\\ m_1m_4=0\\ m_4=-n_1\\ m_1n_4=1\\ m_4^2=-1\\ m_4=n_4\end{cases}\qquad \begin{cases} m_1n_1=0\\ m_1m_4=-1\\ m_4=-m_1\\ m_1n_4=0\\ m_4^2=0\\ m_4=n_4\end{cases}\qquad \begin{cases} m_1=n_1\\ n_1^2=-1\\ m_1n_4=1\\ n_1=-m_4\\ n_1n_4=0\\ m_4n_4=-1\end{cases}\qquad \begin{cases} n_1=n_1\\ n_1^2=0\\ m_1n_4=0\\ n_1=-n_4\\ n_1n_4=-1\\ m_4n_4=0\end{cases}$$

Нетрудно показать, что ни одна из этих систем не имеет действительных корней.

В последнем случае (с) суперпозиция $f\circ g$ удовлетворяет системе:

$$p_y\left(-n_2u_y+m_4v_x\right)+$$
$$+q_y\left(-m_4u_x+\left(m_2-n_4\right)u_y+m_4v_y\right)=0,$$
$$p_y\left(n_2u_x+\left(n_4-m_2\right)v_x-n_2v_y\right)+$$
$$+q_y\left(n_2u_y+\left(n_4-m_4\right)v_x\right)=0.$$

Приравнивая, как и выше, коэффициенты при частных производных, получим следующие условия:

$$\begin{cases} n_2=-n_2\\ m_4=1\\ m_4=-1\\ m_2-n_4=m_2\\ m_4=n_4\end{cases}\qquad \begin{cases} n_2=1\\ n_4=m_2\\ n_2=-m_4\\ n_2=n_2\\ n_4-m_4=1\end{cases}$$

Первая из представленных систем не имеет действительных корней, а решение второй системы: $\mathbf{m}_2=0$, $\mathbf{m}_4=-1$, $\mathbf{n}_2=1$, $\mathbf{n}_4=0$ – приводит нас к частному случаю (8.1). ◄

Утверждение 3. Если $\alpha_1=-\alpha_4,\beta_1=-\beta_4$ и отображение f(x,y) имеет обратное $f^{-1}\left(x,y\right)$, то последнее также принадлежит классу $CR_2^2\left(B\right)$.

►Из существования обратного отображения вытекает условие:

$$u_xv_y-u_yv_x\neq 0. \tag{9}$$

Обозначим через U, V и p, q координатные функции тождественного $f(f^{-1}(x,y))=(x,Y)$ и обратного f^{-1} отображений соответственно, тогда из определения обратного отображения вытекают соотношения:

$$U_x=1\quad U_y=0$$
$$V_x=0\quad V_y=1.$$

Используя тот же прием, что и в доказательстве утверждения 2, и с учетом условия (9), получим требуемые соотношения:

$\alpha_1=\alpha_1$, $\alpha_2=\alpha_2$, $\alpha_3=\alpha_3$, $\alpha_4=-\alpha_1$,

$\beta_1=\beta_1$, $\beta_2=\beta_2$, $\beta_3=\beta_3$, $\beta_4=-\beta_1$.◄

Утверждение 4. Обозначим через φ линейное отображение $\varphi\left(x,y\right)=\left(p\xi+q\eta,r\xi+s\eta\right)$, где p, q, r, s – постоянные. Тогда композиция $f\circ g$ принадлежит классу $CR_2^2\left(C\right)$, где

$$C=\begin{pmatrix} a_1s-a_2q & a_2p-a_1r & a_3s-a_4q & a_4p-a_3r\\ b_1s-b_2q & b_2p-b_1r & b_3s-b_4q & b_4p-b_3r\end{pmatrix}..$$

► Координатные функции отображения $F=f\circ\varphi$ обозначим как U и V, тогда

$$U\left(\xi,\eta\right)=u\left(x\left(\xi,\eta\right),y\left(\xi,\eta\right)\right),$$
$$V\left(\xi,\eta\right)=v\left(x\left(\xi,\eta\right),y\left(\xi,\eta\right)\right).$$

Значит

$U_\xi=u_xx_\xi+u_yy_\xi$, $U_\eta=u_xx_\eta+u_yy_\eta$,

$V_\xi=v_xx_\xi+v_yy_\xi$, $V_\eta=v_xx_\eta+v_yy_\eta$.

Откуда

$$\begin{cases} pu_x+ru_y=U_\xi\\ qu_x+su_y=U_\eta\end{cases},\quad \begin{cases} pv_x+rv_y=V_\xi\\ qv_x+sv_y=V_\eta\end{cases}$$

Решив полученные системы, находим:

$$u_x=\frac{sU_\xi-rU_\eta}{ps-rq},\ u_y=\frac{pU_\eta-qU_\xi}{ps-rq},\quad v_x=\frac{sV_\xi-rV_\eta}{ps-rq},\ v_y=\frac{pV_\eta-qV_\xi}{ps-rq}. \tag{10}$$

Используя выражения (10), получим условия Коши-Римана для пары функций U, V переменных ξ, η:

$$\left(a_1s-a_2q\right)U_\xi+\left(a_2p-a_1r\right)U_\eta+$$
$$+\left(a_3s-a_4q\right)V_\xi+\left(a_4p-a_3r\right)V_\eta=0,$$
$$\left(b_1s-b_2q\right)U_\xi+\left(b_2p-b_1r\right)U_\eta+$$
$$+\left(b_3s-b_4q\right)V_\xi+\left(b_4p-b_3r\right)V_\eta=0.$$ ◄

Следствие. Если f(x,y) удовлетворяет классическому условию Коши-Римана

$a_1=1,\ a_2=a_3=0,\ a_4=-1,$
$b_1=0,\ b_2=b_3=1,\ b_4=0,$ то композиция $f\circ\varphi$

удовлетворяет условию:

$$sU_\xi-rU_\eta+qV_\xi-pV_\eta=0,$$
$$-qU_\xi+pU_\eta+sV_\xi-rV_\eta=0.$$

Утверждение 5. Пусть $\psi(u,v)$ – линейное отображение с матрицей $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, тогда композиция $\psi\circ f$ принадлежит классу $CR_2^2(C)$, где

$$C=\begin{pmatrix} a_1\delta-a_3\gamma & a_2\delta-a_4\gamma & a_3\alpha-a_1\beta & a_4\alpha-a_2\beta\\ b_1\delta-b_3\gamma & b_2\delta-b_4\gamma & b_3\alpha-b_1\beta & b_4\alpha-b_2\beta\end{pmatrix}.$$

► Координатные функции отображения $\Phi=\psi\circ f$ обозначим как U и V, тогда

$U(x,y)=\alpha u(x,y)+\beta v(x,y)$,

$V(x,y)=\gamma u(x,y)+\delta v(x,y)$. Значит

$$\begin{cases}U_x=\alpha u_x+\beta v_x\\ V_x=\gamma u_x+\delta v_x\end{cases},\qquad \begin{cases}U_y=\alpha u_y+\beta v_y\\ V_y=\gamma u_y+\delta v_y\end{cases}.$$

Решив полученные системы, находим:

$$u_x=\frac{\delta U_x-\beta V_x}{\alpha\beta-\gamma\delta},\ u_y=\frac{\delta U_y-\beta V_y}{\alpha\beta-\gamma\delta},$$
$$v_x=\frac{\alpha V_x-\gamma U_x}{\alpha\beta-\gamma\delta},\ v_y=\frac{\alpha V_y-\gamma U_y}{\alpha\beta-\gamma\delta} \qquad (11)$$

Используя выражения (10), получим условия Коши-Римана для пары функций $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$(a_1\delta-a_3\gamma)U_x+(a_2\delta-a_4\gamma)U_y+$$
$$+(a_3\alpha-a_1\beta)V_x+(a_4\alpha-a_2\beta)V_y=0,$$
$$(b_1\delta-b_3\gamma)U_x+(b_2\delta-b_4\gamma)U_y+$$
$$+(b_3\alpha-b_1\beta)V_x+(b_4\alpha-b_2\beta)V_y=0.$$ ◄

Следствие. Если f(x,y) удовлетворяет классическому условию Коши-Римана

$a_1=1,\ a_2=a_3=0,\ a_4=-1,$

$b_1=0,\ b_2=b_3=1,\ b_4=0,$

то композиция $\psi\circ f$ удовлетворяет условию:

$$\delta U_x+\gamma U_y-\beta V_x-\alpha V_y=0$$
$$-\gamma U_x+\delta U_y+\alpha V_x-\beta V_y=0.$$

Утверждение 5. Если f(x,y) удовлетворяет классическому условию Коши-Римана

$a_1=1,\ a_2=a_3=0,\ a_4=-1,$
$b_1=0,\ b_2=b_3=1,\ b_4=0,$ а $\varphi=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ и

$\psi=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ – линейные преобразования, то отображение $\psi\circ f\circ\varphi$ принадлежит классу $CR_2^2(C)$, где

$$C=\begin{pmatrix}\delta s-\gamma q & \gamma p-\delta r & \alpha q-\beta s & \beta r-\alpha p\\ -\gamma s-\delta q & \gamma r+\delta p & \alpha s+\beta q & -\alpha r-\beta p\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Заметим, что первая строка матрицы (12) состоит из элементов произведения матриц $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\gamma & -\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q & -p\\ -s & r\end{pmatrix}$, а вторая строка из элементов произведения $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\gamma & -\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & -r\\ q & -p\end{pmatrix}$.

2. Условия существования отображений класса $\mathbf{CR}_2^2(\mathbf{A})$

Пусть задана матрица $\mathbf{A}$. Зададимся вопросом: существуют ли отображения класса $CR_2^2(A)$?

Утверждение 6. Для заданной ненулевой матрицы $\mathbf{A}$ существует линейное преобразование плоскости φ с матрицей $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ и отображение F, удовлетворяющее классическому условию Коши-Римана, такие, что композиция $F\circ\varphi$ принадлежит классу $CR_2^2(A)$.

► Пусть U, V – координатные функции отображения F. Так как F удовлетворяет классическому условию Коши-Римана:

$$\begin{cases}U_x=V_y\\ U_y=-V_x\end{cases},$$

а матрица Якоби для композиции будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix}U_x & U_y\\ -U_y & U_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}pU_x+rU_y & qU_x+sU_y\\ -pU_y+rU_x & -qU_y+sU_x\end{pmatrix}.$$

Тогда условие Коши-Римана с матрицей $\mathbf{A}$ запишется в виде:

$$a_1(pU_x+rU_y)+a_2(qU_x+sU_y)+$$
$$+a_3(rU_x-pU_y)+a_4(sU_x-qU_y)=0,$$
$$b_1(pU_x+rU_y)+b_2(qU_x+sU_y)+$$
$$+b_3(rU_x-pU_y)+b_4(sU_x-qU_y)=0.$$

Приведем подобные:

$$(a_1p+a_2q+a_3r+a_4s)U_x+$$
$$+(a_1r+a_2s-a_3p-a_4q)U_y=0,$$
$$(b_1p+b_2q+b_3r+b_4s)U_x+$$
$$+(b_1r+b_2s-b_3p-b_4q)U_y=0.$$

Рассмотрим алгебраическую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} &a_1p+a_2q+a_3r+a_4s=0\\ &a_1r+a_2s-a_3p-a_4q=0\\ &b_1p+b_2q+b_3r+b_4s=0\\ &b_1r+b_2s-b_3p-b_4q=0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Если эта система имеет ненулевое решение, то существует отображение, принадлежащее классу $CR_2^2(A)$, при этом в качестве F подойдет любое отображение, удовлетворяющее классическому условию CR. Система (13) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее матрицы равен нулю.

В случае, когда определитель не равен нулю, в качестве F подходят только линейные отображения. Тогда U_x и U_y постоянны, и хотя бы одно из этих чисел, например, $U_x \neq 0$.◄

Заметим, что для отыскания p, q, r, s достаточно решить систему:

$$\begin{aligned} &a_1r+a_2s-a_3p-a_4q=1\\ &a_1p+a_2q+a_3r+a_4s=-U_y/U_x\,.\\ &b_1r+b_2s-b_3p-b_4q=1\\ &b_1p+b_2q+b_3r+b_4s=-U_y/U_x \end{aligned}$$

Поставим и решим еще две задачи, касающиеся существования отображений, удовлетворяющих обобщенным условиям Коши-Римана.

Задача 1. Пусть отображение f принадлежит классу $CR_2^2(A)$. При каких условиях найдется линейное преобразование φ, с которым $F=f\circ\varphi$ удовлетворяет классическому условию Коши-Римана.

Решение. Пусть $\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ матрица преобразования φ. Согласно утверждению 4 композиция F принадлежит классу $CR_2^2(C)$ с матрицей

$$C=\begin{pmatrix} a_1s-a_2q & a_2p-a_1r & a_3s-a_4q & a_4p-a_3r\\ b_1s-b_2q & b_2p-b_1r & b_3s-b_4q & b_4p-b_3r \end{pmatrix}.$$

Из предположения, что F удовлетворяет классическому условию Коши-Римана, получаем систему:

$$\begin{aligned} &a_1s-a_2q-a_4p+a_3r=0\\ &b_2p-b_1r+b_3s-b_4q=0\\ &a_2p-a_1r=0\\ &a_3s-a_4q=0\\ &b_1s-b_2q=0\\ &b_4p-b_3r=0. \end{aligned}$$

Перепишем систему в стандартном виде:

$$\begin{aligned} &a_4p+a_2q-a_3r-a_1s=0\\ &b_2p-b_4q-b_1r+b_3s=0\\ &a_2p-a_1r=0\\ &a_4q-a_3s=0\\ &b_2q-b_1s=0\\ &b_4p-b_3r=0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Обозначим

$$B=\begin{pmatrix} a_4 & a_2 & -a_3 & -a_1\\ b_2 & -b_4 & -b_1 & b_3\\ a_2 & 0 & -a_1 & 0\\ b_4 & 0 & -b_3 & 0\\ 0 & a_4 & 0 & -a_3\\ 0 & b_2 & 0 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Так как нас интересуют только ненулевые решения системы (14), а они существуют лишь тогда, когда, ранг матрицы B меньше 4.

Ответ: задача 1 имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы B меньше 4.

Заметим, что если третья и четвертая строки матрицы B линейно независимы, или линейно независимы пятая и шестая строки, то ранг матрицы B равен 4.

Задача 2. Пусть отображение f принадлежит классу $CR_2^2(A)$. При каких условиях найдется линейное преобразование ψ, с которым $\Phi=\psi\circ f$ удовлетворяет классическому условию Коши-Римана.

Решение. Пусть $\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ матрица преобразования ψ. Согласно утверждению 5 композиция Φ принадлежит классу $CR_2^2(C)$ с матрицей

$$C=\begin{pmatrix} a_1\delta-a_3\gamma & a_2\delta-a_4\gamma & a_3\alpha-a_1\beta & a_4\alpha-a_2\beta\\ b_1\delta-b_3\gamma & b_2\delta-b_4\gamma & b_3\alpha-b_1\beta & b_4\alpha-b_2\beta \end{pmatrix}.$$

Из предположения, что Φ удовлетворяет классическому условию Коши-Римана, получаем систему:

$$\begin{aligned} &a_1\delta-a_3\gamma-a_4\alpha+a_2\beta=0\\ &b_2\delta-b_4\gamma+b_3\alpha-b_1\beta=0\\ &a_2\delta-a_4\gamma=0\\ &a_3\alpha-a_1\beta=0\\ &b_1\delta-b_3\gamma=0\\ &b_4\alpha-b_2\beta=0. \end{aligned}$$

Перепишем систему в стандартном виде:

$$
\begin{cases}
a_4\alpha - a_2\beta + a_3\gamma - a_1\delta = 0 \\
b_3\alpha - b_1\beta - b_4\gamma + b_2\delta = 0 \\
a_4\gamma - a_2\delta = 0 \\
a_3\alpha - a_1\beta = 0 \\
b_3\gamma - b_1\delta = 0 \\
b_4\alpha - b_2\beta = 0.
\end{cases} \qquad (15)
$$

Обозначим

$$
B = \begin{pmatrix}
a_4 & -a_2 & a_3 & -a_1 \\
b_3 & -b_1 & -b_4 & b_2 \\
b_4 & -b_2 & 0 & 0 \\
a_3 & -a_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & -b_1 \\
0 & 0 & a_4 & -a_2
\end{pmatrix}
$$

Система (15) имеет ненулевые решения лишь когда ранг матрицы B меньше 4.

Ответ: задача 1 имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы B меньше 4.

Заключение

В статье найдены достаточные условия замкнутости класса CR_2^2 относительно операций сложения, суперпозиции и обратного отображения. Также представлено, как изменяются обобщенные условия Коши-Римана после линейных преобразований отображений. Во второй части найдены условия, при которых существуют отображения принадлежащие классу CR_2^2 с заданной матрицей коэффициентов системы. А также поставлены и решены две задачи касающиеся существования отображений принадлежащие классу CR_2^2.

Литература

1. Векуа И. Н. Об одном свойстве решений обобщенной системы уравнений Коши-Римана // Сообщ. АН ГССР. 1953. Т. 14. № 8. С. 449 – 453.

2. Латфуллин Т. Г. Квазикомфорные отображения, удовлетворяющие условиям, подобным условиям Коши-Римана // Труды Международной конференции Ломоносовские чтения на Алтае. 2014. С. 323 – 327.

3. Латфуллин Т. Г. Когда однородная система УЧП первого порядка имеет линейное решение // Сб. науч. ст. Международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае». 2012. С. 314 – 318.

4. Морев И. А. Об одном обобщении уравнений Коши-Римана и гармоничности моногенных гиперкомплексных функций // Известия вузов. Математика. 1958. № 3. С. 176 – 182.

5. Ward J. A. From Generalized Cauchy-Riemann Equations to Linear Algebras Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 4. № 3. (Jun., 1953). P. 456 – 461.

6. Williams K. P. A Generalization of the Cauchy-Riemann Equations. The Annals of Mathematics, 2nd Ser. Vol. 30. № 1/4. (1928 – 1929). P. 206 – 210. Jstor.

Информация об авторах:

Швемлер Наталья Александровна – аспирант кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, shvemler.natalya@mail.ru.

Natalia A. Shvemler – post-graduate student at the Department of Mathematical Analysis and Functions Theory, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University.

(**Научный руководитель – *Т. Г. Латфуллин***). (**Academic advisor** – ***T. G. Latfullin***).

Латфуллин Тагир Гумерович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, tlatfullin@yandex.ru.

Tagir G. Latfullin **–** Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Functions Theory, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University.

Статья поступила в редколлегию 10.08.2015 г.