УДК 515.17

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ ХАРАКТЕРОВ

М. И. Тулина, О. А. Чуешева*

CYCLIC SUBGROUPS IN THE CHARACTER GROUP

M. I. Tulina, O. A. Chuesheva

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31109 мол-а).

В работах [1 – 3] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Цель настоящей работы дать явное описание циклических подгрупп в группе характеров для компактной римановой поверхности рода $g > 1$. Это описание позволяет получить новые приложения в теории мультипликативных функций, дифференциалов Прима и мультипликативных точек Вейерштрасса на таких поверхностях.

V. V. Chueshev began building the general theory of multiplicative functions and Prym differentials on compact Riemann surfaces for arbitrary characters. The paper provides an explicite description of cyclic subgroups in the characters group for compact Riemann surfaces of the genus $g > 1$. This description allows acquiring new applications in the theory of multiplicative functions, Prym differentials and in the theory of multiplicative Weierstrass points on such surfaces.

Ключевые слова: компактная риманова поверхность, мультипликативные функции, дифференциалы Прима и мультипликативные точки Вейерштрасса.

Keywords: compact Riemann surface, multiplicative functions, Prym differentials and multiplicative Weierstrass points.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором канонических образующих для первой фундаментальной группы $\pi_1(F)$ поверхности F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ такая, что U / Γ конформно эквивалентна F и Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет алгебраическое представление:

$$\Gamma = \left\langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1} = I \right\rangle,$$

где I – тождественное отображение [4; 1].

Характером ρ для F называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F), \cdot) \to (C^*, \cdot), C^* = C \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором

$$(\rho(a_1), \rho(b_1), ..., \rho(a_g), \rho(b_g)) \in (C^*)^{2g}.$$

Мультипликативной функцией f на F для характера ρ назовем мероморфную на U функцию f такую, что $f(Tz) = \rho(T) f(z), z \in U, T \in \Gamma$.

Затем m-дифференциалом Прима относительно фуксовой группы Γ для ρ называется дифференциал $\phi = \phi(z) dz^m$ такой, что

$$\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma.$$

В работе Л. Берса [1, с. 99] построены голоморфные на F абелевы дифференциалы $\zeta_1, ..., \zeta_g$, которые образуют канонический базис на F двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$ на F. Кроме того, матрица b – периодов $(\pi_{jk})_{j,k=1}^{g}$ на F состоит из комплексных чисел

$$\pi_{jk} = \int_{\xi}^{B_k(\xi)} \varsigma_j(w) dw, \xi \in U.$$

Если f_0 – мультипликативная функция на F для ρ без нулей и полюсов, то

$$\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j(\rho) \zeta_j$$

и $f_0(P) = f_0(P_0) \exp \int_{P_0}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j(\rho) \zeta_j$,

$c_j(P) \in C, j = 1, ..., g, c_j$ зависят голоморфно от ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки P_0 до текущей точки P на поверхности F. Характер ρ для f_0 имеет вид:

$$\rho(a_k) = \exp 2\pi i c_k(\rho),$$

$$\rho(b_k) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j(\rho) \pi_{jk}\right), k = 1, ..., g,$$

где c_j – комплексные числа $0 \le \operatorname{Re} c_j < 1, j = 1,...,g$ [4]. Будем называть такие характеры ρ *несущественными*.

Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F)$.

Обозначим через $Hom(\Gamma, C^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma, C^*)$.

Обозначим через $\left[S^1\right]^{2g}$ подгруппу, состоящую из всех нормированных характеров, т. е. все свои значения они принимают на единичной окружности с центром в нуле.

Точка P называется мультипликативной точкой Вейерштрасса для несущественного (существенного) характера ρ на F, если для P существует мультипликативный непробел

$$j,\ 1 < j \le g,\ \left(1 < j \le g-1\right),$$

т. е. существует мультипликативная функция f для ρ на F с единственным полюсом в P точно порядка $j, j \le g (j \le g-1)$ [3; 2].

Если характеры принадлежат циклическим подгруппам в группе характеров, то мультипликативные функции, дифференциалы Прима и мультипликативные точки Вейерштрасса для таких характеров должны обладать дополнительными свойствами. Если функция f для существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \ge 3$ имеет единственный полюс P точно порядка l, где l – мультипликативный непробел Вейерштрасса для ρ в P на F, то все $n = kl$ будут тоже мультипликативные непробелы Вейештрасса для f^k с ρ^k в точке P. В частности, если $\rho^m = 1, \rho \ne 1$, то $n = ml$ – классический непробел Вейерштрасса для однозначной функции f^m. Таким образом, в некоторых случаях мультипликативные точки Вейерштрасса для ρ будут также и классическими точками Вейерштрасса на F [2].

Кроме того, циклические подгруппы играют большую роль в формулировке и доказательстве аналога теоремы Нетера о $q-$ кратных произведениях для голоморфных 1-дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности рода $g > 1$ [4, с. 159].

§ 2. Циклические группы в группе $Hom(\Gamma, C^*)$

Найдем условия на характер ρ, при которых $\rho^m = 1, m \in \mathrm{N}$. Возьмем представление любого характера ρ в виде:

$$\rho(a_k) = \exp 2\pi i c_k, \rho(b_k) = \exp 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{g} c_j \pi_{jk} + d_k\right),$$

$k = 1,...,g$,

где c_j, d_j – комплексные числа,

$0 \le \operatorname{Re} c_j < 1, 0 \le \operatorname{Re} d_j < 1, j = 1,...,g$ [4, с. 129].

Отметим, что если ρ – существенный характер, то хотя бы одно число $d_j \notin \mathrm{Z}$.

Рассмотрим характер ρ^m и его представление при $m > 1$: $\rho^m(A_j) = \exp 2\pi i c_j m$,

$$\rho^m(B_j) = \exp 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{g} c_k \pi_{jk} m + d_j m\right),$$

$$j = 1,...,g.$$

Найдем необходимые и достаточные условия на параметры c_j и d_j для того, чтобы $\rho^m = 1$ при некотором фиксированном $m > 1$. Такие характеры будут образовывать конечные подгруппы изоморфные $\mathrm{Z}_m \cong \{\rho : \rho^m = 1\} < Hom(\Gamma, C^*)$. Это будут абелевы циклические группы порядка m.

Существование характеров с условием, что $\rho^m = 1, m > 1$, показывает пример.

Если все $c_j = 0$, то имеем $\rho^m(A_j) = 1$ и $\rho^m(B_j) = \exp 2\pi i d_j m$, $j = 1,...,g$.

При $d_j = \dfrac{p_j}{m}$, $p_j = 0,1,...,m-1$

и $c_j = 0, j = 1,...,g$ получаем, что $\rho^m = 1$.

Отсюда легко видеть, что верна лемма.

Лемма 1. Пусть заданы число $m \in \mathrm{N}$ и характер ρ такой, чтовсе числа $c_j = 0, j = 1,...,g$. Тогда характер $\rho^m = 1$, если и только если все $d_j m \in Z, j = 1,...,g$.

Замечание 1. [4; 3]. 1) если $\rho \in L_g$, то $\rho^m \in L_g$ и $\rho^{-1} \in L_g$, так как L_g является подгруппой в группе характеров;

2) если $\rho \in Hom(\Gamma, C^* \setminus L_g)$, то $\dfrac{1}{\rho}$ тоже принадлежит $Hom(\Gamma, C^* \setminus L_g)$.

Теорема 1. Для любого характера ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \ge 2$ и для любого $m \in \mathrm{N}$ верно, что $\rho^m = 1$, если и только если выполняются два условия:

1) $c_j = 0, j = 1,...,g$;

2) $d_j m \in Z, j = 1,...,g$.

Доказательство. Воспользуемся разложением Фаркаша-Кра [4, с. 130]: для любого характера ρ имеется единственное представление
$\rho = \rho_0 \rho_1 \in L_g \times [S^1]^{2g}$.

Равенство $\rho^m = 1$ равносильно равенству $\rho_0^{-m} = \rho_1^m$.

Рассмотрим характер $\tilde{\rho} = \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^m = \rho_1^m = \rho_0^{-m}$.

Характер $\tilde{\rho}$ является одновременно и несущественным и нормированным. По следствию к теореме Фаркаша-Кра [4, с. 130] $\tilde{\rho} = 1$.

Отсюда следует, что $\rho^m = 1$ тогда и только тогда, когда: 1) $\rho_0^m = 1$ и 2) $\rho_1^m = 1$.

Сначала найдем условия на числа c_j, при которых $\rho_0^m = 1$.

Для несущественного характера ρ_0 и для некоторого $m > 1$ имеем систему равенств:

$$\begin{cases} \rho_0^m\left(A_j\right) = \exp 2\pi i c_j m = 1, \\ \rho_0^m\left(B_j\right) = \exp 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{g} m c_k \pi_{kj} = 1. \\ j = 1,...,g. \end{cases}$$

Отсюда следует, что
$\exp 2\pi i m\left(\operatorname{Re} c_j + i \operatorname{Im} c_j\right) = 1$
и $\exp m 2\pi i \operatorname{Re} c_j \cdot \exp\left(-2\pi\left(\operatorname{Im} c_j\right)m\right) = 1$. Поэтому $\operatorname{Im} c_j = 0$ для любого j, а значит все c_j – вещественные числа. Кроме того, из первых g равенств получаем, что $c_j = \dfrac{q_j}{m}, q_j \in Z, j = 1,...,g$.

Из вторых g равенств следует, что

$$\exp 2\pi i \sum_{k=1}^{g} m \frac{q_k}{m} \pi_{jk} = 1 \text{ для любого } j$$

$$\text{и } 1 = \exp 2\pi i\left(\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{g} q_k \pi_{kj} + i \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{g} q_k \pi_{kj}\right) =$$

$$= \exp 2\pi i\left(\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{g} q_k \pi_{kj}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-2\pi \sum_{k=1}^{g} q_k \operatorname{Im} \pi_{kj}\right), \; j = 1,...,g.$$

Отсюда получаем систему из g линейных уравнений с g неизвестными:

$$q_k : \left\{2\pi \sum_{k=1}^{g} q_k \operatorname{Im} \pi_{kj} = 0, j = 1,...,g\right\}.$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\left(\operatorname{Im} \pi_{kj}\right)\begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_g \end{pmatrix} = 0.$$

Так как матрица $\operatorname{Im} \pi_{kj}$ положительно определена, т. е. $\operatorname{Im} \pi_{kj} > 0$ [1], то она невырожденная. Отсюда следует, что $q_1 = ... = q_g = 0$

и $c_j = \dfrac{0}{m} = 0, j = 1,...,g$.

Необходимость второго условия следует из леммы 1.

Обратное утверждение следует из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. 1) В группе $[S^1]^{2g}$ существуют циклические подгруппы любого порядка m, порожденные характером ρ, который задан условиями:

1) $c_j = 0, j = 1,...,g;$ 2) $d_j = \dfrac{p_j}{m}$,
$p_j = 0,1,...,m-1, j = 1,...,g$;

2) в группе L_g не существует нетривиальных циклических подгрупп любого порядка $m > 1$, и подгруппа, порожденная любым $\rho_0 \in L_g \setminus 1$ будет бесконечной циклической группой;

3) для любого
$\rho \in (Hom(\Gamma, C^*) \setminus L_g, \rho \in [S^1]^{2g}$
подгруппа, порожденная ρ будет бесконечной циклической группой;

4) если $\rho = \rho_0 \rho_1 \in \left(Hom\left(\Gamma, C^*\right) \setminus L_g\right)$ и $\rho^m \in L_g$ для некоторого $m \in N$, то это равносильно системе
$$\begin{cases} \rho_1 \neq 1 \\ \rho_1^m = 1 \\ \rho_0^m \in L_g. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из леммы 1.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что $\rho = \rho_0 \in L_g$ т. е. $\rho_1 = 1$. Если $\rho^m = \rho_0^m = 1$, то по теореме 1 необходимо чтобы $c_j = 0, j = 1,..., g$, а значит $\rho_0 = 1$.

Докажем утверждение 3).

Если $\rho \in \left(Hom(\Gamma, C^*) \setminus L_g\right) \setminus [S^1]^{2g}$,

то $\rho = \rho_0 \rho_1$, где $\rho_1 \neq 1, \rho_0 \neq 1$.

Докажем от противного. Предположим, что $1 = \rho^m = \rho_0^m \rho_1^m$ для некоторого $m > 1$. Тогда, как в доказательстве теоремы 1, получим, что

$$\widetilde{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_0}\right)^m = \rho_1^m \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\rho_0}\right)^m = 1 \\ \rho_1^m = 1. \end{cases}$$

Из первого равенства системы следует, что либо $\rho_0 = 1$ (а это невозможно по условию), либо $\rho_0^m = 1, \rho_0 \neq 1$ (что невозможно по утверждению 2). Поэтому предыдущая система не имеет решений. Получили противоречие.

Для доказательства утверждения 4) заметим, что так как $\rho = \rho_0 \rho_1 \in \left(Hom(\Gamma, C^*) \setminus L_g\right)$,

то $\rho_1 \neq 1$.

Если существует $m > 1$, для которого $\rho^m = \rho_0^m \rho_1^m \in L_g$, то $\rho_0^m \rho_1^m = \widetilde{\rho}_0 \in L_g$. Отсюда $\dfrac{\rho_0}{\rho_0^m} = \rho_1^m$. По следствию к теореме Фаркаша-Кра [4, с. 130] последнее равенство равносильно системе $\begin{cases} \rho_1 \neq 1 \\ \rho_1^m = 1 \\ \widetilde{\rho}_0 = \rho_0^m \in L_g. \end{cases}$

Следствие 1 доказано.

Замечание 2. Первое и второе условия в предыдущей системе выполняются тогда и только тогда, когда $\rho_1 \in [S^1]^{2g} \setminus 1$. Третье условие автоматически выполняется в группе L_g при наличии второго. Таким образом, значения $\rho_1(A_j), \rho_1(B_j)$ лежат на единичной окружности, но одновременно не обращаются в 1. Следовательно, в этом случае ρ_1 принадлежит $[S^1]^{2g} \setminus \{(1,1,...,1)\}$ [2].

Литература

1. Альфорс Л. В., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961. 175 с.

2. Чуешев В. В. Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 4. С. 629 – 636.

3. Чуешев В. В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности: учебное пособие. Ч. 2. Кемерово, 2003.

4. Farkas H. M., Kra I. Riemann surfaces. Grad. Text's Math. V. 71. Springer, New-York, 1992.

5. Gunning R. C. On the period classes of Prym differentials. J. Reine Angew. Math., 319 (1980). P. 153 – 171.

Информация об авторах:

Тулина Марина Ивановна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Горно-Алтайского госуниверситета, aniram.ru@googlemail.com.

Marina I. Tulina – Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer at the Department of the Mathematical Analysis, Gorno-Altaisk State University.

Чуешева Ольга Александровна – старший преподаватель кафедры фундаментальной математики КемГУ, simran@mail.ru.

Olga A. Chuesheva – Senior Lecturer at the Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 21.09.2015 г.