

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПЛОТНОСТЬЮ И ВЯЗКОСТЬЮ В УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ОТВОДА ДИФФУЗИОННОГО СЛОЯ**  
**H. M. Вьюнник, Ю. Н. Захаров, А. А. Кириченко, Б. А. Лобасенко, В. В. Рагулин**

**DEVELOPING THE MODEL OF THE MOTION OF A FLUID WITH VARIABLE DENSITY AND VISCOSITY IN THE DEVICE FOR DIVERSTION OF DIFFUSION LAYER**  
**N. M. Vyunnik, Yu. N. Zakharov, A. A. Kirichenko, B. A. Lobasenko, V. V. Ragulin**

*Работа выполнена при поддержке проектной части Государственного задания № 1.630.2014/К.*

Предметом исследования является процесс отведения плотных слоев жидкости в устройстве для отвода диффузионного слоя. В статье предлагается математическая модель для описания движения несжимаемой жидкости с переменной вязкостью и плотностью. Предлагаемая модель из-за особенностей расчетной области рассматривается в цилиндрической системе координат. Также приводятся результаты расчетов, проведенных с использованием описанной модели при постоянных значениях вязкости и плотности. Предполагается дальнейшее использование полученной модели для исследования процесса отвода диффузионного слоя при концентрации молока с помощью мембранных фильтров.

The research focuses on the process of exhausting the dense layers of fluid in a device for draining the diffusion layer. The paper studies the mathematical model for describing the motion of an incompressible fluid with variable viscosity and density. The proposed model is considered in a cylindrical coordinate system because of the characteristics of the computational domain. Also, the results of calculations are performed using the described model with constant viscosity and density. The resulting model can further be used for studying the process of removing the diffusion layer at concentrating milk using membrane filters.

**Ключевые слова:** мембранные концентрирование, неоднородная жидкость, переменная плотность, переменная вязкость, цилиндрическая система координат, математическая модель.

**Keywords:** membrane concentration, heterogeneous fluid, variable density, variable viscosity, cylindrical coordinate system, mathematical model.

### **Введение**

Математическое моделирование движения жидкости имеет большое значение в развитии различных областей науки и промышленности.

Одной из областей, нуждающихся в математическом моделировании, являются различные технические системы, используемые в пищевой промышленности. При этом важная роль отводится глубокой переработке пищевого сырья. Часто для этого производят разделение сырья на различные компоненты для последующего синтеза на их основе разнообразных пищевых продуктов. Для этих целей целесообразно использовать мембранные технологии, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами разделения. Однако при фильтрации на мемbrane образуется диффузионный пограничный слой с повышенной концентрацией задерживаемых веществ (явление концентрационной поляризации), который увеличивает гидравлическое сопротивление и снижает производительность процесса. В типовых мембранных аппаратах с ним борются, используя различные способы: механические, гидродинамические, физические, химические. Однако предотвратить полностью это явление невозможно. Кроме того, это требует использования дополнительных средств и трудозатрат, усложняет конструкцию аппаратов.

Авторами [2] использован иной подход, предусматривающий отвод некоторой части диффузионного пограничного слоя в качестве готового продукта или в качестве исходного раствора в дальнейшем процессе концентрирования. При этом одновременно осуществляется отвод фильтрата. Совместное сочетание этих

способов позволяет значительно увеличить производительность процесса.

Проводимые в последние годы работы в этом направлении привели к созданию ряда конструкций, использующих это явление, отличающихся более высокой производительностью и меньшими энергозатратами, по сравнению с типовыми. Решение прикладных задач потребовало создание соответствующего математического обеспечения, так как известные математические модели трансмембранного переноса не всегда адекватно описывают процессы концентрирования, происходящие в этих аппаратах.

Одна из математических моделей, описывающих течение Пуайзеля для жидкости с переменной вязкостью, приводится в статье [7]. Также в статье [6] приводится математическая модель, описывающая движение жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей.

В данной работе предлагается математическая модель процесса концентрирования раствора высокомолекулярных веществ в конструкции с отводом диффузионного слоя [5] как движение вязкой несжимаемой жидкости с переменной плотностью [10; 11; 9].

### **Математическая модель**

Приведём описание устройства, необходимое для построения расчетной области (и построения модели): устройство состоит из цилиндрического корпуса; корпус имеет кольцевые щели; внутри корпуса находится подвижный шток переменной конфигурации.

Переменная конфигурация и подвижность штока будет осуществляться за счет изменения значений параметров, геометрии устройства при расчетах.

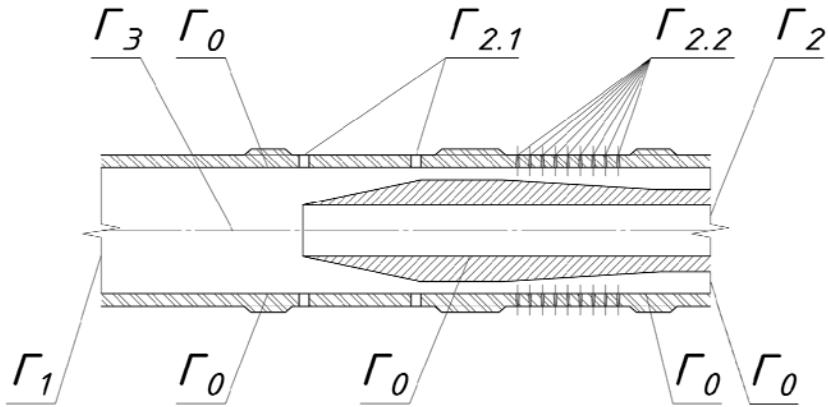


Рис. 1. Аппарат для мембранныго концентрирования в разрезе

Из рис. 1 видно, что канал протекания имеет четыре различных вида поверхностей.

- $\Gamma_0$  – жесткая стенка;
- $\Gamma_1$  – поверхность, через которую смесь поступает внутрь канала;
- $\Gamma_2, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$  – отверстия, через которые смесь покидает канал;
- $\Gamma_3$  – центр осевой симметрии.

Учитывая принятное описание аппарата, будем считать, что канал образован в результате вращения своего разреза (рис. 1) вокруг своей оси.

Далее будем предполагать осевую симметрию всех процессов в концентраторе.

Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости будем описывать системой дифференциальных уравнений Навье-Стокса. В естественных переменных система запишется в виде [3]:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \\ = -v_i (\rho_2 - \rho_1) D \Delta C - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \\ + \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (1) \\ i = 1, 2, 3; \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \end{aligned}$$

где  $v_1$  –  $i$ -ый компонент вектора скорости

$\vec{V}$  ( $i = 1, 2, 3$ ,  $p$  – давление,  $\mu > 0$  – динамическая вязкость,

$\mu_2$  – динамическая вязкость примеси (задерживающих компонентов),  $\mu_1$  – динамическая вязкость жидкости без учета примеси,  $\rho$  – плотность смеси,

$\rho_2$  – плотность примеси,  $\rho_1$  – плотность жидкости без учета примеси,  $D$  – диффузия,  $C$  – концентрация примеси.

Для системы (1) поставим следующие краевые условия для скоростей:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : v_1 = 0; v_2 = 0; v_3 = 0; \\ \Gamma_1 : v_1 = 0; v_2 = 0; \frac{\partial v_3}{\partial t} = F_3; \\ \Gamma_2 : v_1 = 0; v_2 = 0; \frac{\partial v_3}{\partial t} = F_3; \quad (2) \\ \Gamma_{21} : \frac{\partial v_1}{\partial t} = F_1; \frac{\partial v_2}{\partial t} = F_2; v_3 = 0; \\ \Gamma_{22} : \frac{\partial v_1}{\partial t} = F_1; \frac{\partial v_2}{\partial t} = F_2; v_3 = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения значений плотности и вязкости смеси используются следующие зависимости от концентраций компонент смеси:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_2 \cdot C + (1-C)\rho_1, \\ \mu = \mu_2 \cdot C + (1-C)\mu_1. \quad (3) \end{aligned}$$

Краевые условия для давления:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \\ \Gamma_1 : p = p_1; \\ \Gamma_2 : p = p_2; \quad (4) \\ \Gamma_{21} : p = p_{21}; \\ \Gamma_{22} : p = p_{22}. \end{aligned}$$

#### Алгоритм решения

Для решения начально-краевой задачи для системы (1-2) был использован следующий алгоритм.

На первом этапе с учетом известных вектора скорости и распределения концентрации (а значит и значений плотности и вязкости) совершается шаг по времени для гидродинамической части системы уравнений (1), для этого используется схема расщепления по физическим факторам. В цилиндрической системе координат эта схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) = -\tilde{u} \cdot (\rho_2 - \rho_1) D \Delta C + \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \right) + \\
+ \frac{2 \cdot \mu}{r} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\tilde{u}}{r} \right), \quad \rho \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) = -\tilde{w} \cdot (\rho_2 - \rho_1) D \Delta C + \\
+ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right), \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение для нахождения давления:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}p = f, \\
f = \rho^2 \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{u}}{r} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) - 2\rho \left( \frac{\partial \mu}{\partial r} (\Delta \tilde{u}) + \frac{\partial \mu}{\partial z} (\Delta \tilde{w}) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) + \\
+ \frac{\partial \rho}{\partial r} \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \mu \left( \Delta \tilde{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \mu (\Delta \tilde{w}) \right); \quad (6) \\
\tilde{A} = -\rho \Delta + KC \cdot \tilde{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + KC \cdot \tilde{w} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}; \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Уравнение для нахождения итоговых скоростей:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\tau} = - \left( \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} \right).$$

Уравнение переноса концентрации:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = \\
= D \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (7)
\end{aligned}$$

Для численного решения уравнений (5) – (7) с соответствующими краевыми условиями (2), (4) используется метод сеток с использованием неравномерной сетки по пространственным переменным. На этой сетке решаемые уравнения аппроксимировались разностными схемами, удовлетворяющими законам сохранения [4].

Для решения системы уравнений (5) используется схема стабилизирующих поправок [8].

Для решения системы линейных алгебраических уравнений, получающихся после аппроксимации за-

дачи (4), (6) разностной схемой второго порядка аппроксимации использовался итерационный метод неполной аппроксимации [1].

Для решения уравнения переноса концентрации (7) использовалась схема продольно-поперечной прогонки [8].

#### *Движение вязкой несжимаемой жидкости с переменной плотностью*

В качестве примера использования модели ниже приведены скриншоты проведенного расчета (см. рис. 2 – 5) с входными параметрами:  $N$  – номер шага по времени;  $Nz$  – количество узлов по оси  $z$ ;  $Nr$  – количество узлов по оси  $r$ ;  $\tau$  – шаг по времени;  $\mu > 0$  – динамическая вязкость;  $\rho$  – плотность смеси;  $D$  – диффузия;  $C$  – концентрация примеси;  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_{21}$ ,  $p_{22}$  – значения давления на соответствующих границах  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_{21}$ ,  $\Gamma_{22}$ .

На рис. 2 приведена визуализация расчета с параметрами  $Nz = 150$ ,  $Nr = 20$ ,  $\tau = 0.000005$ ,  $\mu = 0.000001$ ,  $\rho = 1$ ,  $D = 0.01$ ,  $C = 0.9$ ,  $p_1 = 0.001$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_{21} = 0.0004$ ,  $p_{22} = 0$ .

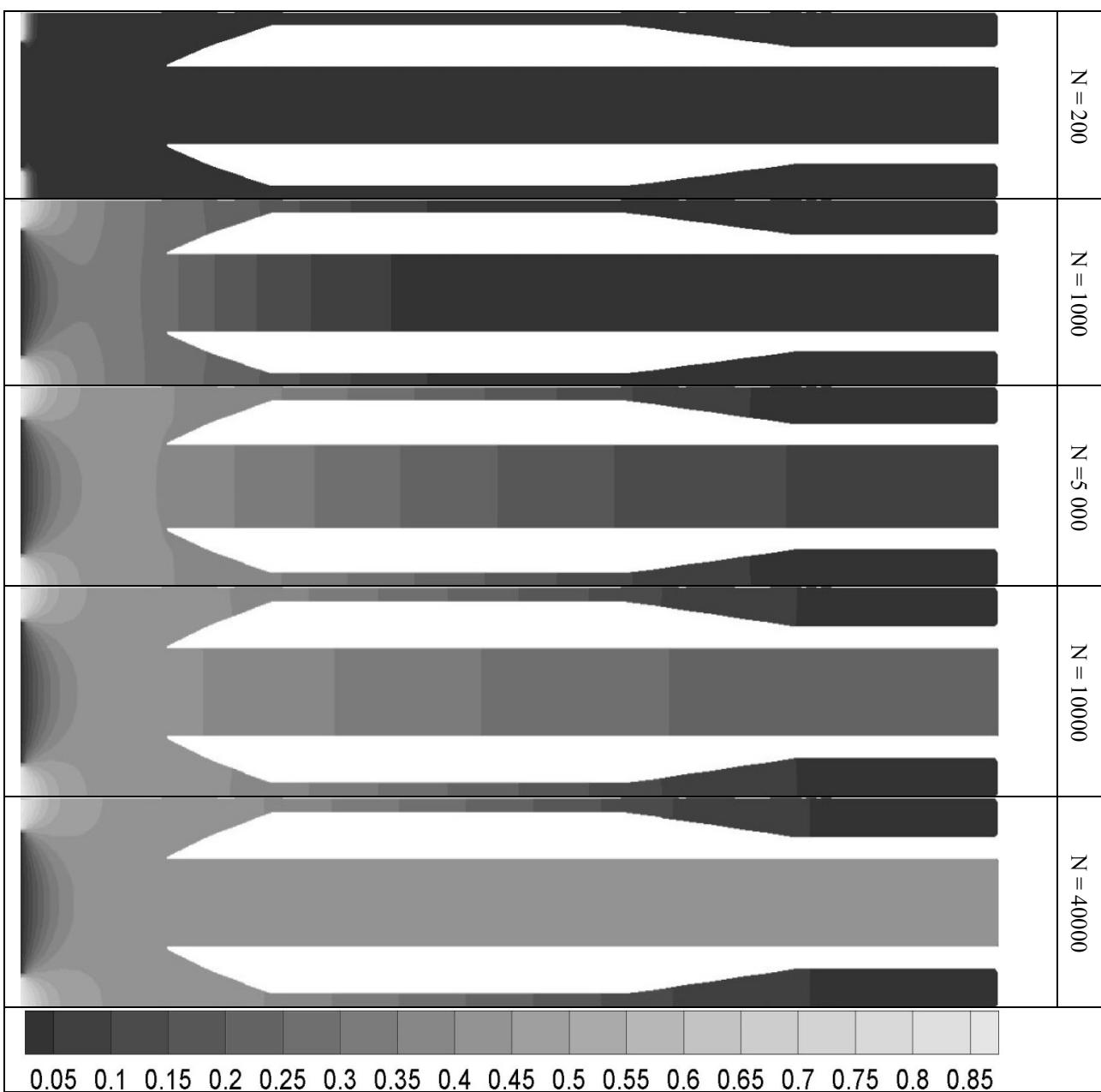


Рис. 2а. Распространение концентрации примеси

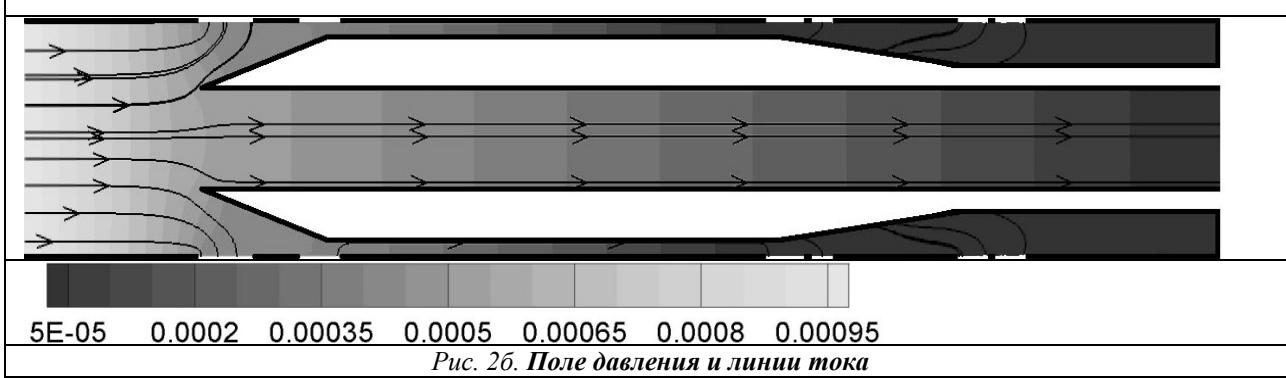
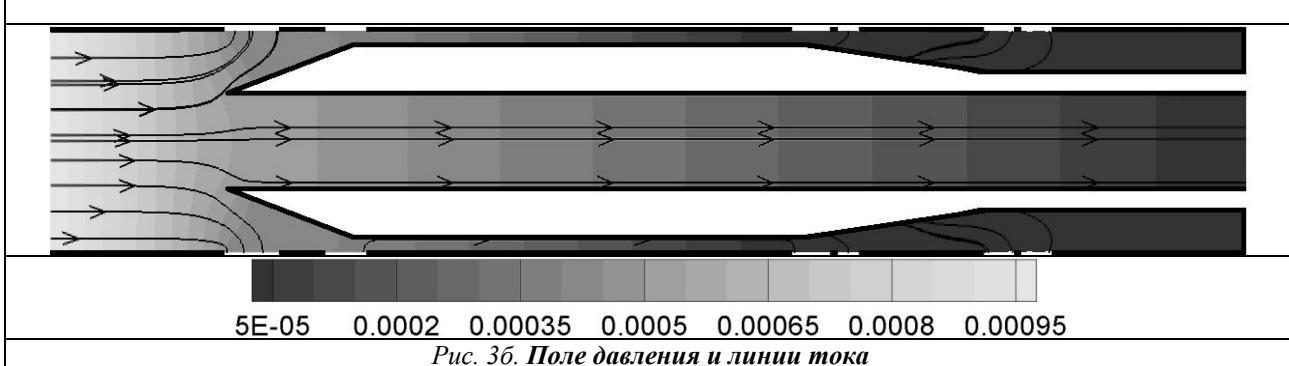
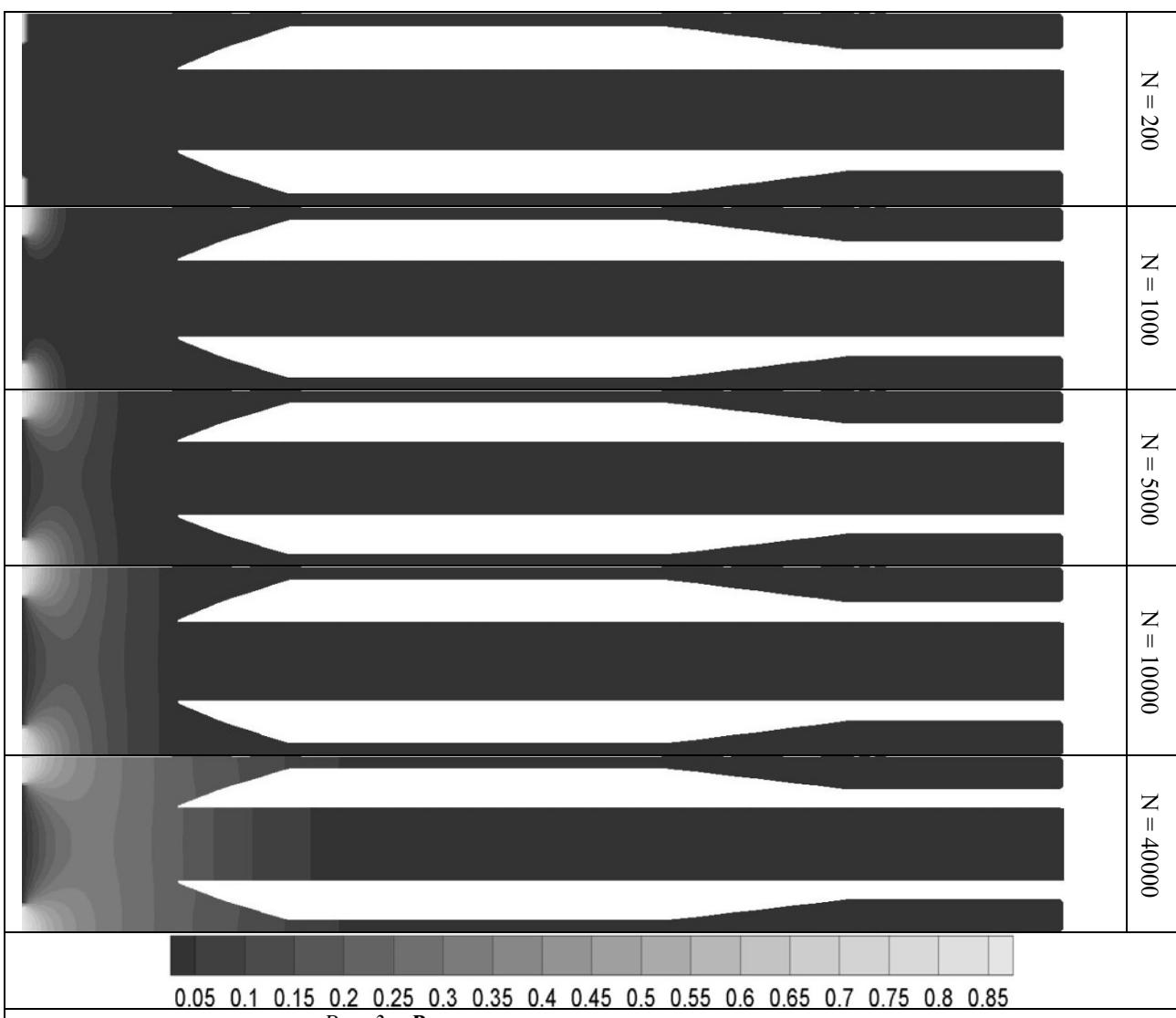


Рис. 2б. Поле давления и линии тока

На рис. 3 приведена визуализация расчета с параметрами  $Nz = 150$ ,  $Nr = 20$ ,  $\tau = 0.000005$ ,  $\mu = 0.000001$ ,  $\rho = 1$ ,  $D = 0.0001$ ,  $C = 0.9$ ,  $p_1 = 0.001$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_{21} = 0.0004$ ,  $p_{22} = 0$ .



На рис. 4 приведена визуализация расчета с параметрами  $Nz = 150$ ,  $Nr = 20$ ,  $\tau = 0.000005$ ,  $\mu = 0.000001$ ,  $\rho = 1$ ,  $D = 0.01$ ,  $C = 0.9$ ,  $p_1 = 0.001$ ,  $p_2 = 0.0003$ ,  $p_{21} = 0.0007$ ,  $p_{22} = 0$ .

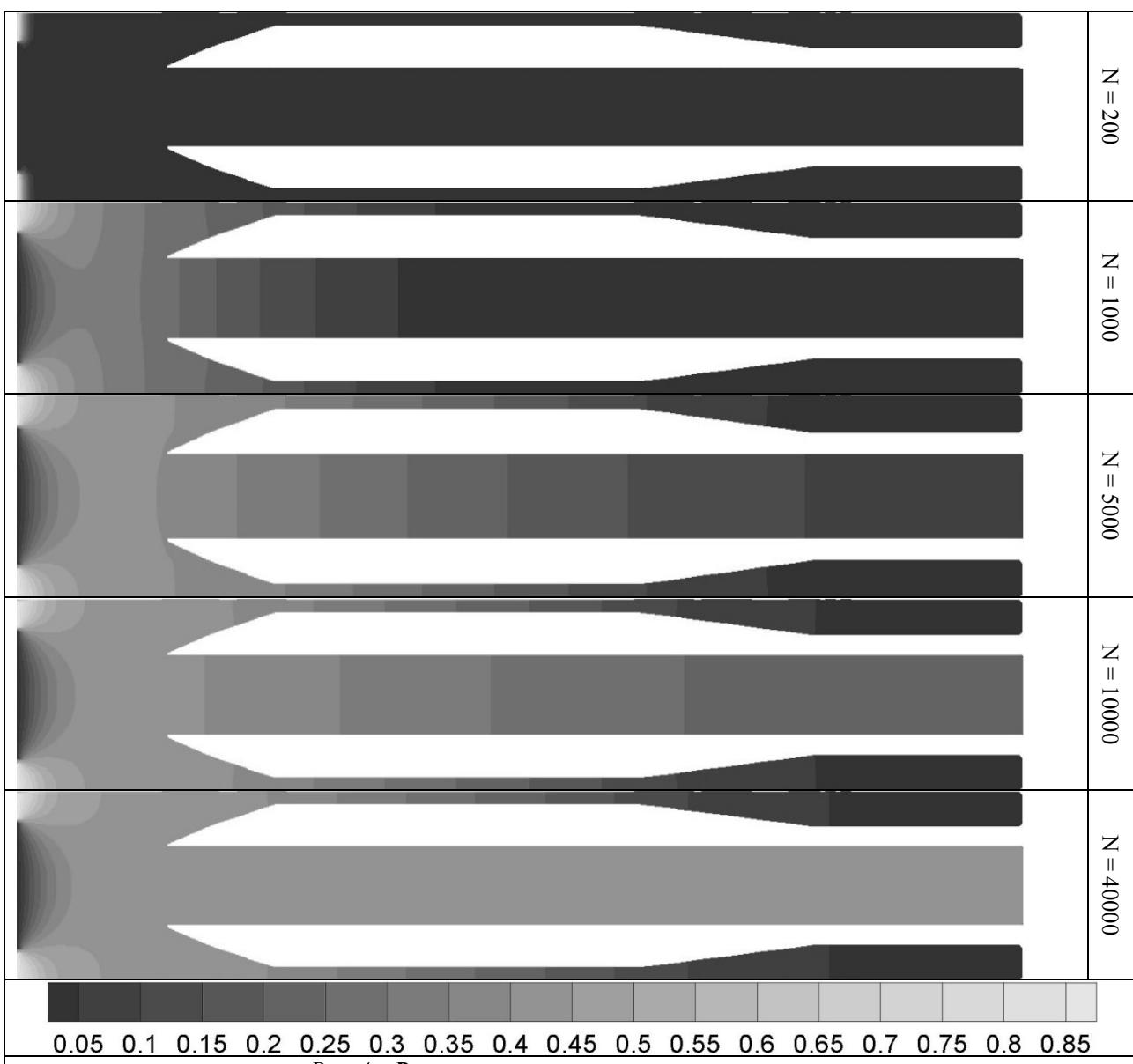


Рис. 4а. Распространение концентрации примеси

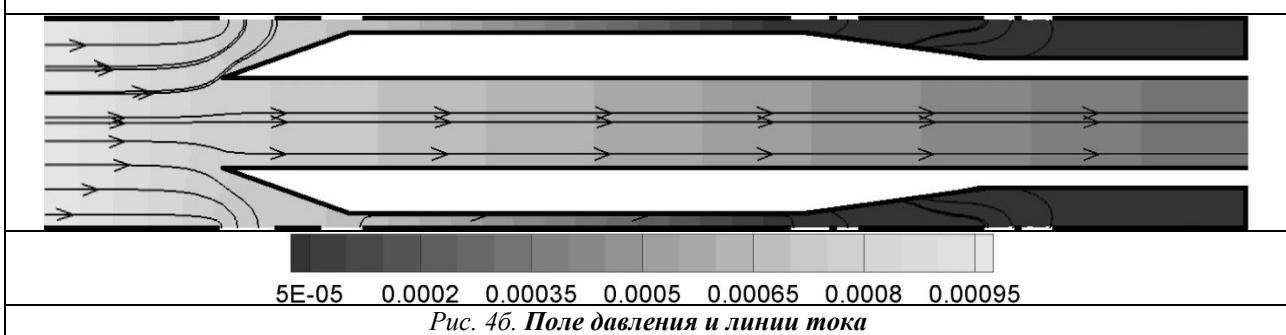
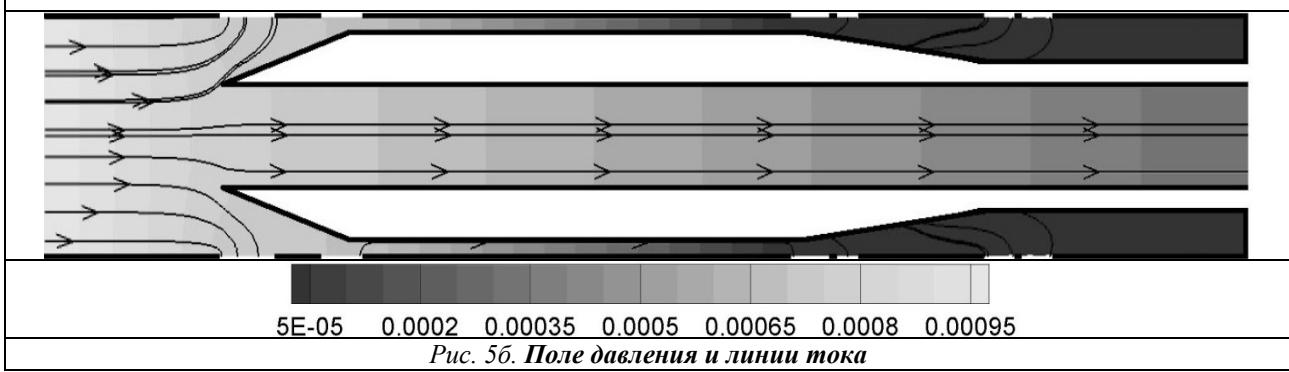
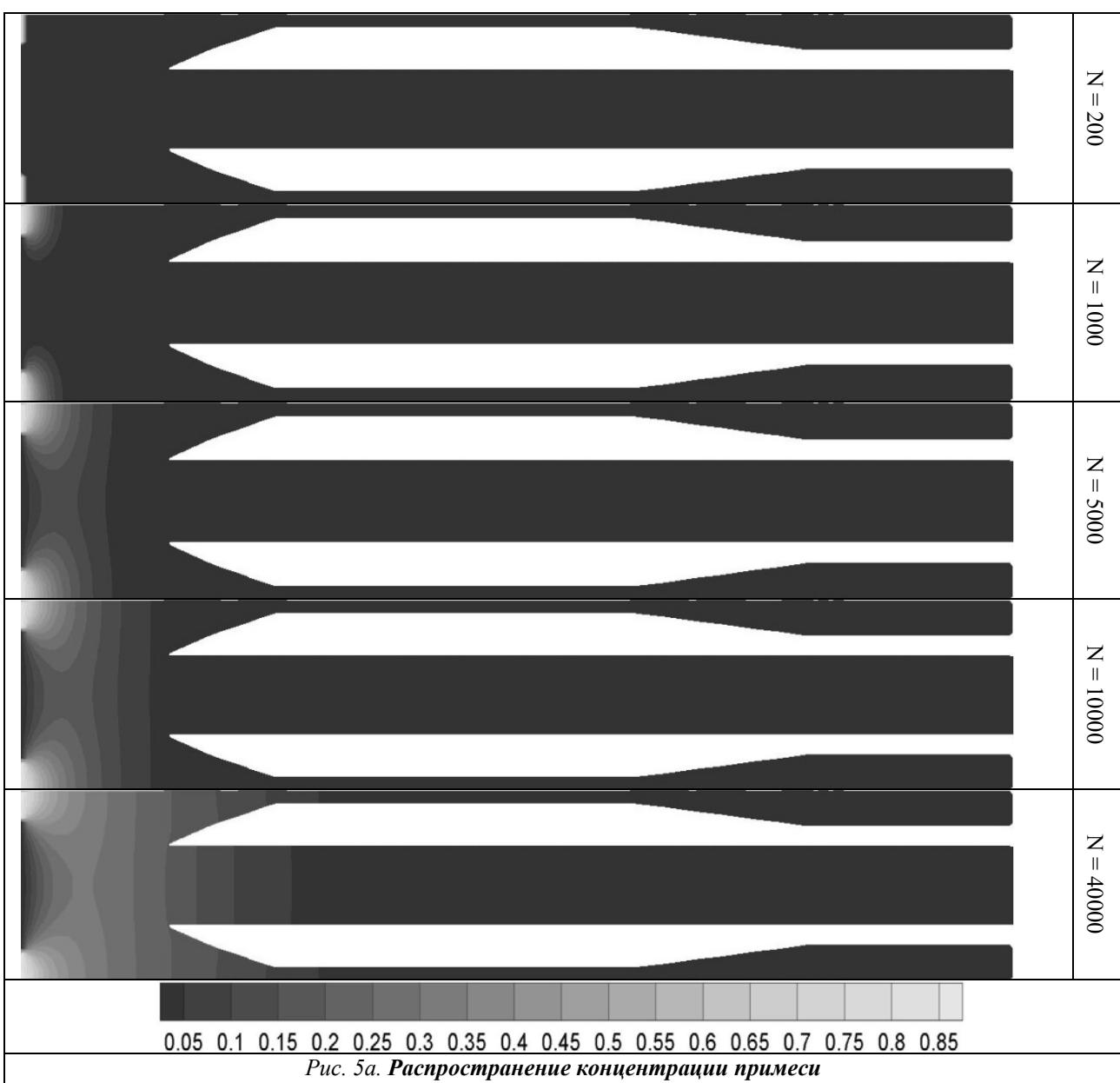


Рис. 4б. Поле давления и линии тока

На рис. 5 приведена визуализация расчета с параметрами  $Nz = 150$ ,  $Nr = 20$ ,  $\tau = 0.000005$ ,  $\mu = 0.000001$ ,  $\rho = 1$ ,  $D = 0.0001$ ,  $C = 0.9$ ,  $p_1 = 0.001$ ,  $p_2 = 0.0003$ ,  $p_{21} = 0.0007$ ,  $p_{22} = 0$ .



**Описание**

Приведенные расчеты показывают, что данная математическая модель действительно позволяет моделировать процесс отвода диффузионного слоя. Не смотря на то, что в произведенных расчетах используются не все возможности модели, на рисунках видно, что поступающая в устройство жидкость с различной плотностью отводится через отверстия так,

что в центре устройства остается менее плотная часть жидкости.

Предложенная в статье модель позволяет изучить характер распространения примеси в устройстве для отвода диффузионного слоя. При проведении соответствующих расчетов модель позволит прогнозировать геометрические параметры устройства с целью интенсификации производительности.

**Литература**

1. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 2004. 239 с.
2. Лобасенко Б. А., Лобасенко Р. Б. Ультрафильтрация молока и молочных продуктов: монография. Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. Кемерово, 2006. 117 с.
3. Милошевич Х., Захаров Ю. Н., Контрец Н., Зимин А. И., Нуднер И. С., Рагулин В. В. Об одной модели размыва связного грунта и движения поверхностных волн // Вестник Кемеровского государственного университета. 2015. № 2(62). Т. 1. С. 35 – 40.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломеханики и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
5. Пат. № 2506991. Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> B 01 D 63/06. Аппарат для мембранных концентрирования / Лобасенко Б. А., Шушпанников А. С., Семенов А. Г., Захаров Ю. Н.; заявитель и патентообладатель Лобасенко Б. А. №2012138966/05; заявл. 11.09.2012; опубл. 20.02.14. Бюл. 5 (2014 г.). 4 с.
6. Пивоваров Ю. В. Расчет движения жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. 2005. № 3(10). С. 87 – 107.
7. Хайрисламов К. З. Течение Пуазеля для жидкости с переменной // Вестник Южно-Уральского государственного университета. (Серия: Математика. Механика. Физика). 2013. № 2(5). С. 170 – 173.
8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967. 197 с.
9. Geidarov N. A., Zakharov Yu. N., Shokin Yi. I. Solution of the problem of viscous fluid flow with a given pressure differential (2011) Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling 26. 1. P. 39 – 48.
10. Gummel E. E., Milosevic H., Ragulin V. V., Zakharov Yu. N., Zimin A. I. Motion of viscous inhomogeneous incompressible fluid of variable viscosity (2014) Zbornik radova konferencije MIT 2013. P. 267 – 274.
11. Milosevic H., Geydarov N. A., Zakharov Yu. N. Model of incompressible viscous fluid flow driven by pressure difference in a given channel (2013) International Journal of Heat and Mass Transfer. 62. P. 242 – 246.

**Информация об авторах:**

*Вынник Наталья Михайловна* – аспирант КемГУ, kot.gerasim@yandex.ru.

*Natalia M. Vyunnik* – post-graduate student at Kemerovo State University.

(Научный руководитель – **Ю. Н. Захаров**). (Academic advisor – **Yu. N. Zakharov**).

**Захаров Юрий Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ЮНЕСКО по информационным вычислительным технологиям КемГУ, zaharovyn@rambler.ru.

**Yury N. Zakharov** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department for Information Computing Technology, Kemerovo State University.

**Кириченко Александр Алексеевич** – аспирант Кемеровского технологического института пищевой промышленности, reysonk@gmail.com.

*Alexander A. Kirichenko* –post-graduate student at the Kemerovo Institute of Food Science and Technology. (Научный руководитель – **Б. А. Лобасенко**). (Academic advisor – **B. A. Lobasenko**).

**Лобасенко Борис Анатольевич** – доктор технических наук, профессор кафедры технологического проектирования пищевых производств Кемеровского технологического института пищевой промышленности, lobasenko@mail.ru.

**Boris A. Lobasenko** – Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Technological Design of Food Production, Kemerovo Institute of Food Science and Technology.

**Рагулин Владимир Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики КемГУ, ragulin@ngs.ru.

**Vladimir V. Ragulin** – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University.

Статья поступила в редакцию 21.09.2015 г.