

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ОДНОТИПНОЙ ПОПУЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ

А. А. Бутков, А. Г. Егоров

THE MODEL OF ONE-TYPE POPULATION DYNAMICS IN SPACE AND TIME

A. A. Butov, A. G. Egorov

В статье рассматривается математическая модель роста однотипной популяции, развивающейся из исходной популяции во времени и двумерном пространстве. Например, это может быть популяция однополюх бактерий, развивающаяся на плоскости. В качестве области распространения бактерий выбран прямоугольник, поделенный на несколько одинаковых прямоугольников. Для каждой прямоугольной области подсчитывается точное значение количества бактерий, находящихся внутри нее. Время в данной модели является непрерывным. Модель учитывает рождение бактерий и перемещение между соседними областями. Интенсивности перемещений называются случайной средой. В общем случае случайная среда предполагается неоднородной: интенсивность перехода бактерии зависит от текущего положения и выбранного направления. На основе этой модели ставится и решается задача прогнозирования развития бактерий во времени, а также оценивания числа бактерий в ненаблюдаемых областях в момент наблюдения. Для этого был найден аналитический вид условного математического ожидания числа бактерий в каждой области. В конце статьи приводятся результаты работы компьютерной программы, решающей поставленные задачи.

The paper considers the mathematical model of one-type population growth, evolving in time and two-dimensional space, e. g. a population of agamogenetic bacterias on a plane. The area where bacterias grow is a rectangle, which is further divided into several identical rectangles. For each rectangular area the precise value of bacterias number is known. Time in this model is continuous. The model includes birth and moving between adjacent areas. The intensities of the movements are called random environment. In general, the random environment is assumed as inhomogeneous: the intensity of the bacterias' movements depends on the current position and the chosen direction. Based on this model the authors formulated and solved the problem of predicting the growth of bacterias in time and estimating the number of bacterias in unobserved areas based on the known values in several observed areas in the moment of observation. To solve this problem the analytic form of the conditional mathematical expectation of the number of bacterias in each area was found. The paper is concluded with the results of a computer program solving these problems.

Ключевые слова: случайное блуждание, процессы размножения и гибели, семимартингалы.

Keywords: random walk, birth and death processes, semimartingale.

Пусть область распространения бактерий Λ имеет форму прямоугольника. Разобьем ее на одинаковые прямоугольные области $S^{i,j}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$, L и M – натуральные числа, таким образом $\Lambda = \{S^{i,j}\}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$. В каждой области $S^{i,j}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$ может находиться неотрицательное целое число бактерий.

Все случайные процессы, встречающиеся в данной статье, заданы на стохастическом базисе $(\Omega, F, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ с обычными условиями Деллашери (основные определения и термины для описания семимартингалов см. в [4]). Обозначим $N_t^{i,j}$ – случайный процесс, считающий количество бактерий, находящихся в момент времени t внутри области $S^{i,j}$, а $N_t = \{N_t^{i,j} : 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq M\}$. Каждая бактерия из области $S^{i,j}$ ($S^{i,j} \in \Lambda$) за время $h \rightarrow 0, h > 0$ может с вероятностью $\rho \cdot h + o(h)$ ($\rho \geq 0$) поделиться на две. Обозначим $B_t^{i,j}$ – случайный процесс, считающий количество появившихся

бактерий в результате деления (“рождений”) внутри области $S^{i,j}$. Количество делений прямо пропорционально количеству бактерий в области $S^{i,j}$ в момент времени t , поэтому компенсатор процесса $B_t^{i,j}$ равен:

$$\tilde{B}_t^{i,j} = \int_0^t \rho \cdot N_s^{i,j} ds. \quad (1)$$

За то же время h бактерия может уйти из области $S^{i,j}$ с вероятностью $\delta^{i,j} \cdot h + o(h)$. Обозначим $D_t^{i,j}$ и $A_t^{i,j}$ – случайные процессы, считающие количество уходов из области $S^{i,j}$ и переходов в область $S^{i,j}$ из соседних областей соответственно. Количество уходов из области $S^{i,j}$ прямо пропорционально количеству бактерий в области $S^{i,j}$, поэтому компенсатор процесса $D_t^{i,j}$ записывается следующим образом:

$$\tilde{D}_t^{i,j} = \int_0^t \delta^{i,j} \cdot N_s^{i,j} ds, \quad (2)$$

где $\delta^{i,j}$ – интенсивность ухода бактерии из области $S^{i,j}$ ($S^{i,j} \in \Lambda$).

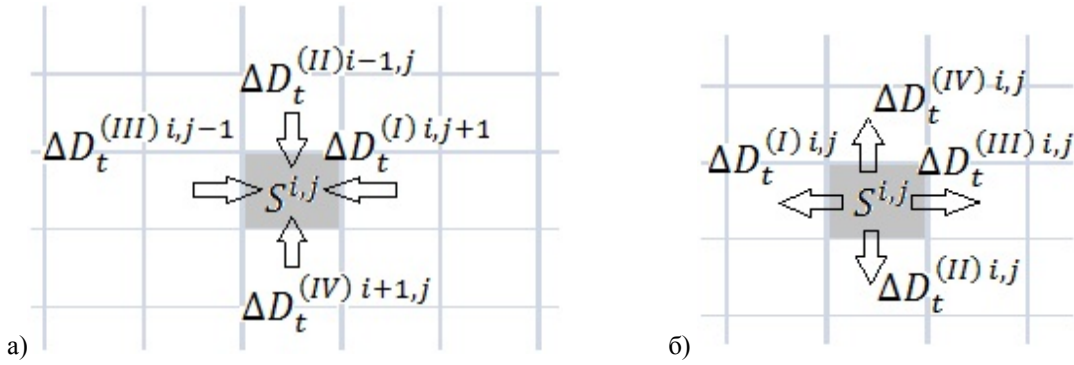


Рис. 1. Переходы бактерий из области $S^{i,j}$ и в область $S^{i,j}$ из соседних областей

Обозначим $\Delta D_t^{(I)i,j}$ – количество бактерий за время $[t-h; t]$, $h \rightarrow 0$, $h > 0$, $t > 0$ перешедших из области $S^{i,j}$ в область $S^{i,j+1}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 < j \leq M$; $\Delta D_t^{(II)i,j}$ – из области $S^{i,j}$ в область $S^{i+1,j}$, $1 \leq i < L$ и $1 \leq j \leq M$; $\Delta D_t^{(III)i,j}$ – из области $S^{i,j}$ в область $S^{i,j-1}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j < M$ и $\Delta D_t^{(IV)i,j}$ – из области $S^{i,j}$ в область $S^{i-1,j}$, $1 \leq i < L$ и $1 \leq j \leq M$, см. рис. 1 (а, б). Пусть на интервале времени от 0 до t бактерии не умирают, тогда выполняется соотношение:

$$\Delta D_t^{i,j} = \Delta D_t^{(I)i,j} + \Delta D_t^{(II)i,j} + \Delta D_t^{(III)i,j} + \Delta D_t^{(IV)i,j}. \quad (3)$$

Предполагается, что бактерия может перейти только в одну область, поэтому выполняется равенство (4):

$$\sum_{\substack{l,s=I, \\ l \neq s}}^{IV} \Delta D_t^{(s)i,j} \cdot \Delta D_t^{(l)i,j} = 0 \quad \text{Р-п. н.} \quad (4)$$

Вероятности переходов равны:

$$\begin{cases} P(\Delta D_t^{(I)i,j}=1|F_{t-h}) = \alpha^{i,j} \cdot N_{t-h}^{i,j} \cdot h + o(h); \\ P(\Delta D_t^{(II)i,j}=1|F_{t-h}) = \beta^{i,j} \cdot N_{t-h}^{i,j} \cdot h + o(h); \\ P(\Delta D_t^{(III)i,j}=1|F_{t-h}) = \kappa^{i,j} \cdot N_{t-h}^{i,j} \cdot h + o(h); \\ P(\Delta D_t^{(IV)i,j}=1|F_{t-h}) = \varepsilon^{i,j} \cdot N_{t-h}^{i,j} \cdot h + o(h); \\ \alpha^{i,j} + \beta^{i,j} + \kappa^{i,j} + \varepsilon^{i,j} = \delta^{i,j} \end{cases} \quad (5)$$

где $h \rightarrow 0$, $h > 0$.

Совокупность случайных величин

$$\mathcal{E} = \{(\alpha^{i,j}, \beta^{i,j}, \kappa^{i,j}, \varepsilon^{i,j}), \forall S^{i,j} \in \Lambda\}$$

называется случайной средой [1].

С учетом (5) процесс $A_t^{i,j}$ равен:

$$A_t^{i,j} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^t \left(\Delta D_s^{i,j-1} + \Delta D_s^{i+1,j} + \Delta D_s^{i,j+1} + \Delta D_s^{i-1,j} \right). \quad (6)$$

Объединяя формулы (1) – (3), (6) количество бактерий в области $S^{i,j}$ ($1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$) в момент времени t , равно:

$$N_t^{i,j} = N_0^{i,j} + B_t^{i,j} + A_t^{i,j} - D_t^{i,j}, \quad (7)$$

где $N_0^{i,j}$ – начальное количество бактерий в области $S^{i,j}$ ($1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$).

Предположим, что процесс N_t $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$ является частично-наблюдаемым: в случайные моменты времени τ_k , $k > 0$ скачков пуассоновского процесса π_t с интенсивностью $\lambda > 0$ наблюдаются значения случайного процесса N_t в нескольких произвольных областях $S^{i,j} \in U_k$, $U_k \subset \Lambda$. Обозначим Q_t – процесс наблюдения за процессом N_t . Процесс $Q_t^{i,j}$ определяется уравнением:

$$dQ_t^{i,j} = (N_t^{i,j} - Q_t^{i,j}) \cdot I(S^{i,j} \in U_{\pi_t}) \cdot d\pi_t,$$

где $I(S^{i,j} \in U_{\pi_t})$ – индикаторная функция, равная единице, если условие в скобках выполняется, и нулю – иначе; $U_{\pi_t} = U_k$ при $\pi_t = k$.

Пусть известно распределение бактерий во всей области Λ в начальный момент времени, а также параметры случайной среды $\mathcal{E}$ и интенсивности рождения ρ . Требуется по наблюдениям Q_t предсказать рост бактерий во времени, а также в моменты наблюдений оценить число бактерий в произвольной области $S^{i,j} \in \Lambda \setminus U_k$.

Пусть $\mathcal{F}_t^{Q,\pi}$ – σ -алгебра, порожденная процессами Q_t и π_t . Тогда оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой прогноза развития бактерий является $E(N_t | \mathcal{F}_t^{Q,\pi})$ при $t_0 < t < \tau_1$ [1], где τ_1 –

момент первого наблюдения. Сформулируем и докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Условное математическое ожидание числа бактерий в момент времени t , $0 < t < \tau_1$ в области $\Lambda = \{S^{i,j}\}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$ при условии $\mathcal{F}_t^{Q,\pi}$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(N_t^{i,j} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) = & \\ = & (\rho - \delta^{i,j}) \cdot E(N_t^{i,j} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) + \\ & + \alpha^{i,j+1} \cdot E(N_t^{i,j+1} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) + \\ & + \beta^{i-1,j} \cdot E(N_t^{i-1,j} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) + \\ & + \kappa^{i,j-1} \cdot E(N_t^{i,j-1} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) + \\ & + \varepsilon^{i+1,j} \cdot E(N_t^{i+1,j} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) \end{aligned} \quad (8)$$

при известных начальных значениях $N_0^{i,j}$. Слагаемые в формуле (8) с индексами: 0, $L+1$ и $M+1$ равны 0.

Доказательство. Из уравнений (1), (2), (6) и (7) следует, что условное математическое ожидание процесса $N_t^{i,j}$, считающего количество бактерий в области $S^{i,j}$ ($1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$) при условии $\mathcal{F}_t^{Q,\pi}$ равно:

$$\begin{aligned} E(N_t^{i,j} | \mathcal{F}_t^{Q,\pi}) = & N_0^{i,j} + E\left(\int_0^t \rho \cdot N_s^{i,j} ds | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}\right) + \\ & + E\left(\int_0^t (\Delta D_s^{i,j-1} + \Delta D_s^{i+1,j} + \Delta D_s^{i,j+1} + \Delta D_s^{i-1,j}) | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}\right) - \\ & - E\left(\int_0^t \delta^{i,j} \cdot N_s^{i,j} ds | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}\right) = \\ = & N_0^{i,j} + \rho \cdot \int_0^t E(N_s^{i,j} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds + \\ & + \alpha^{i,j+1} \cdot \int_0^t E(N_s^{i,j+1} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds + \\ & + \beta^{i-1,j} \cdot \int_0^t E(N_s^{i-1,j} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds + \\ & + \kappa^{i,j-1} \cdot \int_0^t E(N_s^{i,j-1} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds + \\ & + \varepsilon^{i+1,j} \cdot \int_0^t E(N_s^{i+1,j} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds - \\ & - \delta^{i,j} \cdot \int_0^t E(N_s^{i,j} | \mathcal{F}_s^{Q,\pi}) ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$; слагаемые с индексами: 0, $L+1$ и $M+1$ равны нулю. Система (9) может быть записана в дифференциальном виде, см. формулу (8).

Получена система $L \times M$ однородных линейных дифференциальных уравнений (8) с $L \times M$ неизвестными и начальными значениями $N_0^{i,j}$. Решение таких систем подробно изложено в работе [5] и здесь не приводится.

Пусть теперь t^* – произвольный момент времени. Обозначим $\tau = \tau_k$, $k = \max\{i: \tau_i < t^*\}$ и рассмотрим процесс N_t , начиная с момента времени τ , сместив начало временной оси в момент τ последнего скачка, предшествующего t^* . Тогда t будет означать время, прошедшее с момента τ . Справедлива следующая теорема.

Теорема. Условное математическое ожидание числа бактерий в момент времени $t^* = \tau + t$ в области $\Lambda = \{S^{i,j}\}$, $1 \leq i \leq L$ и $1 \leq j \leq M$ при условии $\mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}$ определяются системой дифференциальных уравнений (10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(N_{\tau+t}^{i,j} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) = & \\ = & (\rho - \delta^{i,j}) \cdot E(N_{\tau+t}^{i,j} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) + \\ & + \alpha^{i,j+1} \cdot E(N_{\tau+t}^{i,j+1} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) + \\ & + \beta^{i-1,j} \cdot E(N_{\tau+t}^{i-1,j} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) + \\ & + \kappa^{i,j-1} \cdot E(N_{\tau+t}^{i,j-1} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) + \\ & + \varepsilon^{i+1,j} \cdot E(N_{\tau+t}^{i+1,j} | \mathcal{F}_{\tau+t}^{Q,\pi}) \end{aligned} \quad (10)$$

при известных значениях $N_\tau^{i,j}$. Слагаемые в формуле (10) с индексами: 0, $L+1$ и $M+1$ равны нулю.

Доказательство. Доказательство очевидным образом следует из леммы 3.1, а также из того, что процесс N_t является однородным и марковским.

Таким образом, система (10) позволяет прогнозировать развитие бактерий в любой момент времени $t > 0$ при известных значениях количества бактерий во всей области в момент последнего наблюдения.

Для удобства дальнейших рассуждений удобно перейти от двойного индекса (i, j) в нумерации областей к одинарному k . Перенумеруем все области Λ следующим образом:

$$S^{i,j} \rightarrow S^k = S^{(i-1) \cdot M + j}, \quad \forall S^{i,j} \in \Lambda, \quad (11)$$

где M – количество областей, расположенных в одном ряду прямоугольной области. Оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой числа бактерий в ненаблюдаемых областях $S^i \in \Lambda \setminus U$ в момент наблюдения τ_k , $k > 0$ является $E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k}^{Q,\pi})$ [4].

Однако в виду большой размерности получить эту оценку авторам не удалось. Не удастся также получить численную оценку, построенную по нескольким траекториям, так как для этого требуется иметь боль-

шое количество траекторий процесса N_t таких, что в момент времени τ_k количество бактерий в наблюдаемых областях $S^i \in U$ совпали. В данной работе представлены два наиболее простых метода оценивания:

– условное математическое ожидание $E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})$;

– линейная модель:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{\tau_k}^i - E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) &= \\ &= \sum_{j: S^j \in U} a_j(\tau_k) \cdot (Q_{\tau_k}^j - E(N_{\tau_k}^j | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})), \end{aligned} \quad (12)$$

где $a_j(\tau_k) \in \Lambda$ – коэффициенты, определяемые при каждом наблюдении.

Рассмотрим линейную модель. Требуется построить такую оценку, чтобы:

$$\begin{aligned} E(N_{\tau_k}^i - \hat{N}_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})^2 &\rightarrow \min, \\ E \left(\begin{aligned} &N_{\tau_k}^i - E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) - \\ &- a(\tau_k)^T \cdot (Q_{\tau_k} - E(Q_{\tau_k} | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})) | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi} \end{aligned} \right)^2 &\rightarrow \min, \\ E \left(\begin{aligned} &N_{\tau_k}^i - E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) - \\ &- a^T(\tau_k) \cdot (Q_{\tau_k} - E(Q_{\tau_k} | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})) | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi} \end{aligned} \right)^2 &= \\ &= a(\tau_k)^T \cdot R(\tau_k) \cdot a(\tau_k) - 2 \cdot a(\tau_k)^T \cdot r(\tau_k) + \\ &+ E(N_{\tau_k}^i - E(N_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})^2. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю градиент по a этой функции, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a(\tau_k)^T \cdot R(\tau_k) - r(\tau_k) &= 0 \\ a_{opt}(\tau_k) &= R(\tau_k)^{-1} \cdot r(\tau_k), \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_{opt}(\tau_k)$ – вектор оптимальных значений коэффициентов $a_i(\tau_k), 1 \leq i \leq |U|$; $R(\tau_k)$ – условная ковариационная матрица размера $|U| \times |U|$ с элементами:

$$R_{i,j}(\tau_k) = cov \left(\begin{aligned} &Q_{\tau_k}^i - E(Q_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}), \\ &Q_{\tau_k}^j - E(Q_{\tau_k}^j | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi} \end{aligned} \right);$$

$r(\tau_k)$ – вектор-столбец размера $|U|$ с элементами:

$$cov \left(\begin{aligned} &N_{\tau_k}^l - E(N_{\tau_k}^l | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}), \\ &Q_{\tau_k}^i - E(Q_{\tau_k}^i | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi} \end{aligned} \right), \quad 1 \leq i \leq |U|,$$

$S^l \in \Lambda$. Полученное решение называют системой простого кригинга [4].

Таким образом, для использования линейной модели необходимо знать условную ковариацию двух произвольных областей. Аналитически оценить зна-

чения условной ковариации для двух произвольных полей автору не удалось, поэтому в работе используется ее эмпирическая оценка. По известным значениям распределения бактерий в предыдущий момент наблюдений $N_{\tau_{k-1}}^i, S^i \in \Lambda$, параметрам случайной среды $\mathcal{E}$ и интенсивности рождений ρ строится имитационная модель на отрезке от τ_{k-1} до τ_k ($k > 0$): запускается K случайных траекторий процесса N_{τ_k} , по которым оценивается эмпирическая оценка условной ковариации двух произвольных полей $\forall S^i, S^j \in \Lambda$ по формуле (14):

$$\begin{aligned} cov(N_{\tau_k}^i, N_{\tau_k}^j | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}) &= \\ &= \frac{1}{K} \cdot \sum_{l=1}^K (N_{\tau_k}^{i,l} - E(N_{\tau_k}^{i,l} | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})) \cdot \\ &\cdot (N_{\tau_k}^{j,l} - E(N_{\tau_k}^{j,l} | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})), \end{aligned} \quad (14)$$

где l – номер случайной траектории. Поскольку $E(N_{\tau_k}^{j,l} | \mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi})$ неизвестно, а численно оценить это значение не представляется возможным в виду большой размерности, вместо условия $\mathcal{F}_{\tau_k-}^{Q,\pi}$ в дальнейшем используется условие $\mathcal{F}_{\tau_k-}$.

Полученные оценки ковариации подставляются в формулу (13) и по методу кригинга (12) оценивается число бактерий в неизвестных областях. Эмпирическая условная ковариационная матрица процесса N_t оценивалась на основе 1000 реализаций случайного процесса N_t из заданного начального состояния N_0 , с заданными коэффициентами случайной среды $\mathcal{E}$ и интенсивности рождения ρ .

Было построено несколько эмпирических условных корреляционных и ковариационных матриц из разных начальных состояний и для разных значений случайной среды $\mathcal{E}$. Типичные графики этих матриц приведены на рис. 2. Максимальный не диагональный элемент эмпирической условной корреляционной матрицы приближенно равен 0.431. С ростом количества процессов, по которым строится матрица, значения вне диагонали уменьшаются, выходя на стационарный уровень. На рис. 3 приведен график изменения максимального недиагонального элемента m матрицы в зависимости от количества процессов:

$$\begin{aligned} A &= corr(N_t, N_t | F_t)^k - I \\ m &= \sup_{ij, \forall S^{i,j} \in \Lambda} (a_{ij}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $corr(N_t, N_t | F_t)^k$ – экспериментальная условная корреляционная матрица, построенная по k случайным траекториям; N_t – вектор размера $L \cdot M$; I – единичная матрица; a_{ij} – компоненты матрицы A .

На графике видно, что при $k = 1000$ процессов значение m выходит на стационарный уровень. Поэтому 1000 траекторий достаточно для построения эмпирической условной ковариационной матрицы.

Условное математическое ожидание $E(N_t | F_t)$ было рассчитано численно на языке программирова-

ния *Python 3.0* при помощи компоненты *integrate.odeint* библиотеки *scipy v0.14.0* для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На рис. 4, 5 и 6 представлены примеры решения задачи линейной моделью.

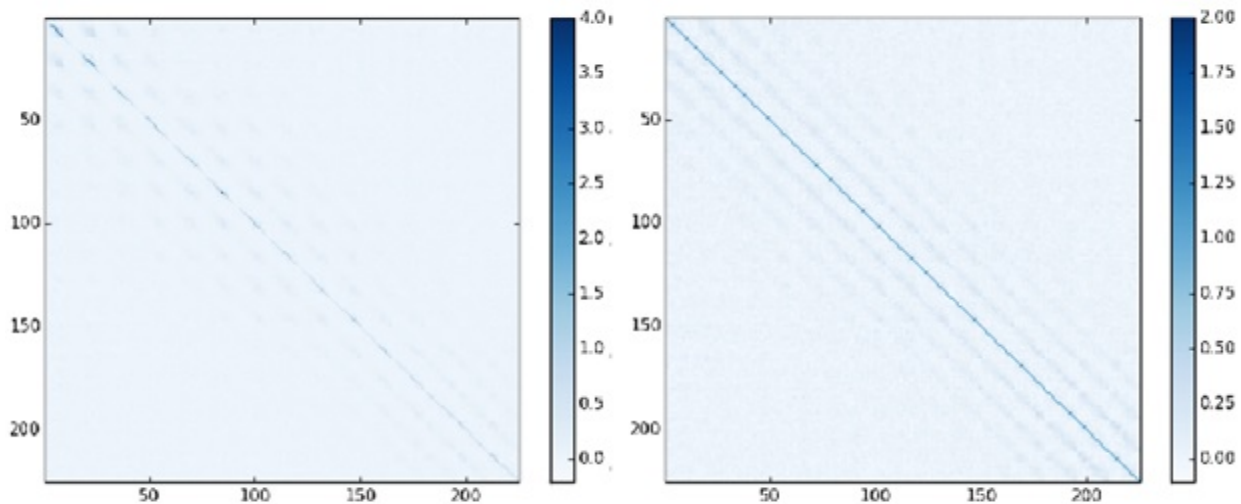


Рис. 2. Эмпирические условные ковариационная (слева) и корреляционная (справа) матрицы для процесса N_t , представленного на рис. 6. Матрицы построены по 1000 случайным траекториям, при $t = 10$

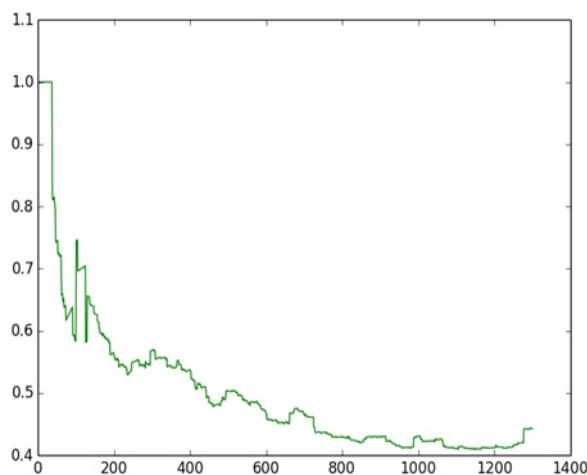


Рис. 3. Изменение максимального недиагонального элемента m (см. формулу (15)) экспериментальной условной корреляционной матрицы с ростом количества траекторий для процесса N_t , представленного на рис. 6. По оси абсцисс – количество траекторий; по ординат – значение m

На рис. 4, 5 и 6 представлены оценки, полученные линейной моделью. Если сравнить средний квадрат ошибки между реальными значениями и их оценкой, построенной линейной моделью, со средним квадратом ошибки между реальными значениями и условным математическим ожиданием $E(N_t | F_{t-})$, то

полученные значения очень близки: в зависимости от множества наблюдаемых полей U значения условного математического ожидания могут давать меньшую или большую ошибку. Это означает, что в качестве наилучшей оценки можно выбрать оценку условного математического ожидания как наиболее простую.

Модель, приведенная в данной главе схожа с моделью, описанной в терминах марковских случайных процессов в работах [3; 7]. Данная модель отличается от нее семимартингалным представлением, на основании которого становится возможным построение имитационной компьютерной модели [2]. Задач предсказания развития бактерий, а также оценивания числа бактерий в произвольной области по имеющимся наблюдениям в литературе найдено не было.

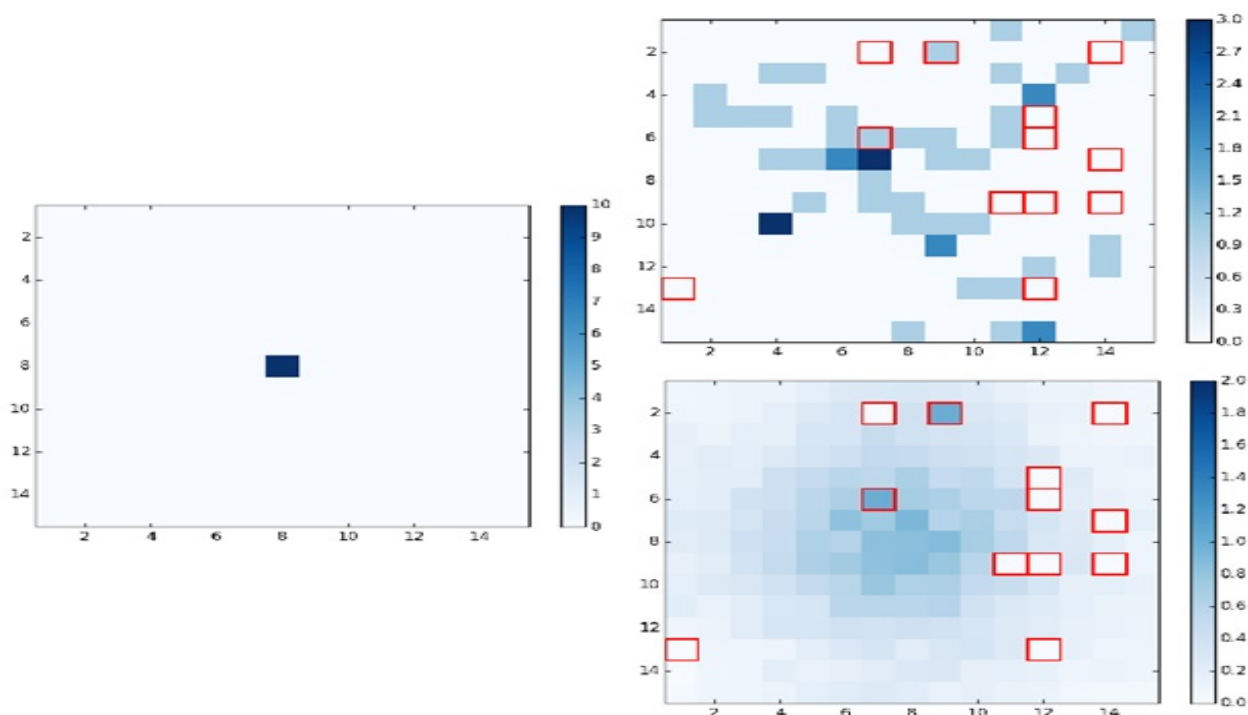


Рис. 4. Слева: начальное размещение числа бактерий по области Λ ; справа сверху: распределение бактерий в момент времени $t = 10$ (на графике наблюдаемые значения выделены красным); справа снизу: оценка числа бактерий области Λ , полученная линейным методом по наблюдаемым значениям; область Λ закрыта; случайная среда однородная ($\lambda \approx 0.691$); $\rho = 0.2$

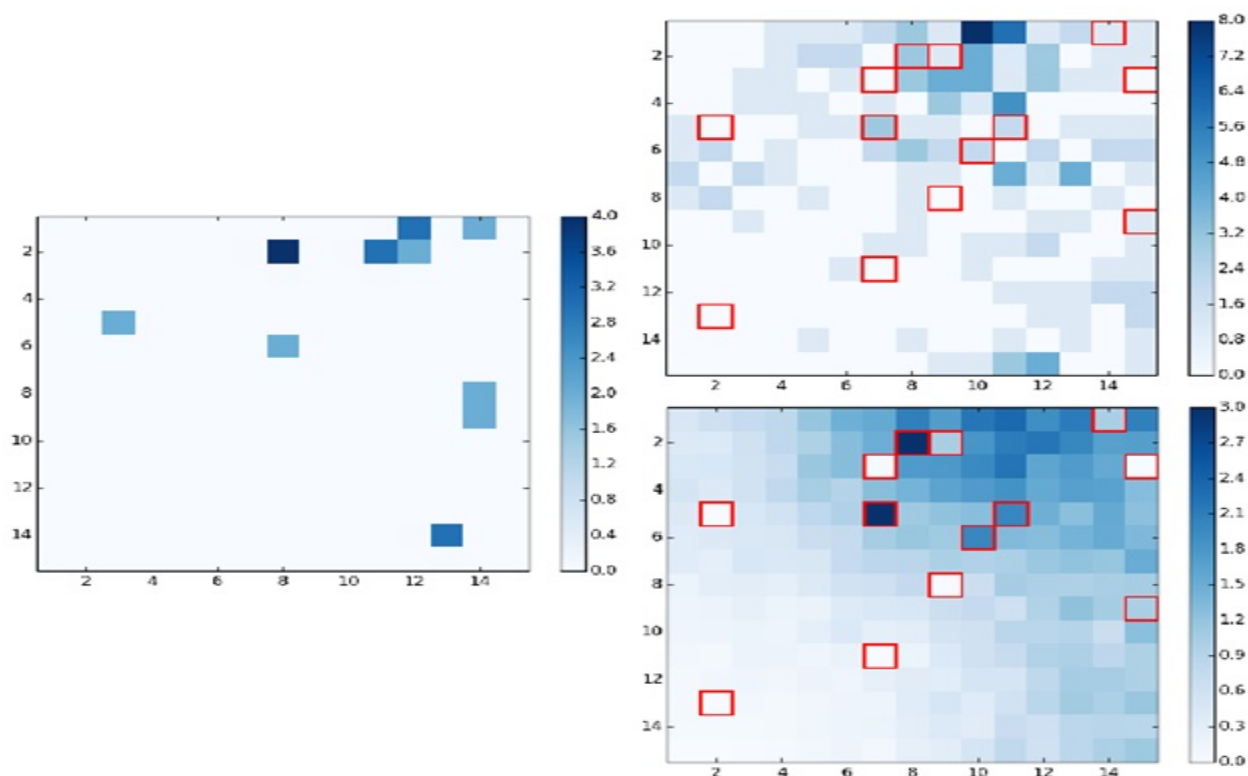


Рис. 5. Слева: начальное размещение числа бактерий по области Λ ; справа сверху: распределение бактерий в момент времени $t = 10$ (на графике наблюдаемые значения выделены красным); справа снизу: оценка числа бактерий области Λ , полученная линейным методом по наблюдаемым значениям; левая граница области Λ открыта; случайная среда однородная ($\lambda \approx 0.691$); $\rho = 0.2$

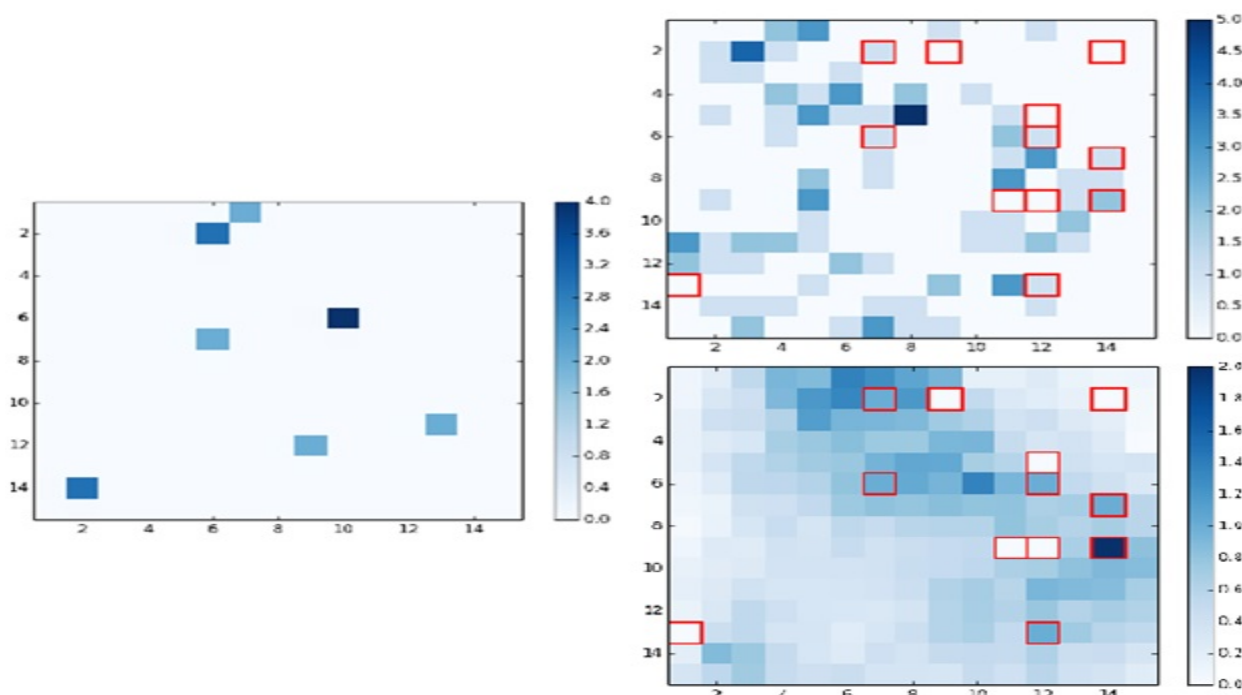


Рис. 6. Слева: начальное размещение числа бактерий по области Λ ; справа сверху: распределение бактерий в момент времени $t = 10$ (на графике наблюдаемые значения выделены красным); справа снизу: оценка числа бактерий области Λ , полученная линейным методом по наблюдаемым значениям. Левая граница области Λ открыта; случайная среда симметричная: $\alpha^{i,j} = \kappa^{i,j-1} = \lambda^j$ при $1 < j \leq M$ и $\beta^{i,j} = \varepsilon^{i+1,j} = \mu^i$ при $1 \leq i < L$. Коэффициенты $\{\lambda^j, \mu^i\}$ сгенерированы из равномерного распределения на отрезке $[0;1]$; $\rho = 0.2$

Литература

1. Бутов А. А. Мартингалные методы изучения случайных блужданий в одномерной случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. 1994. 39:4. С. 681 – 698.
2. Бутов А. А., Раводин К. О. Теория случайных процессов: учебно-методическое пособие. Ульяновск: УлГУ, 2009. 62 с.
3. Калинин А. В., Мاستихин А. В. Интегральное представление переходных вероятностей марковского процесса эпидемии Вейса и предельная теорема // Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения", посвященная столетию со дня рождения Б. В. Гнеденко: тезисы докладов. Москва, 26 – 30 июня 2012 г. М.: Изд-во URSS, 2012. С. 45 – 46.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.
5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4 изд. М.: Наука, 1974. 331 с.
6. Савельев А. А., Мухарамова С. С., Пилюгин А. Г., Чижилова Н. А. Геоэкономический анализ данных в экологии и природопользовании (с применением пакета R): учебное пособие. Казань: Казанский университет, 2012. 120 с.
7. Яровая Е. Б. Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности // Автоматика и телемеханика. 2010. № 7. С. 29 – 46.

Информация об авторах:

Бутов Александр Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Ульяновского государственного университета, pm@ulsu.ru.

Alexander A. Butov – Doctor of Physics and Mathematics, Full Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Ulyanovsk State University.

Егоров Александр Геннадьевич – аспирант кафедры прикладной математики Ульяновского государственного университета, al.g.egorov@gmail.com.

Alexander G. Egorov – post-graduate student at the Department of Applied Mathematics, Ulyanovsk State University. (Научный руководитель – А. А. Бутов). (Academic advisor – A. A. Butov).

Статья поступила в редколлегию 26.03.2015 г.