УДК 517.925.41

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ПИКОВ РЕСУРСА В МОДЕЛИ МИГРАЦИИ ЖИВОТНЫХ

В. В. Мачулис

TRANSITIONS NEAR RESOURCE MAXIMAS IN THE MODEL OF ANIMAL MIGRATION

V. V. Machulis

В работе предпринята попытка найти численно предполагаемые периодические решения в окрестностях двух пиков ресурсной функции в математической модели миграции животных. Для описания эволюции миграции применялась модель, учитывающая нестационарность окружающей среды [3]. В частности, исследовалось дифференциальное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью, отрицательной вязкостью и периодическим внешним воздействием. В результате найдены решения, которые не являются, строго говоря, периодическими, но проявляют периодическое поведение на некотором ограниченном промежутке. Выявлены также некоторые зависимости между параметрами модели. Полученные результаты говорят о необходимости уточнения некоторых предполагаемых вариантов поведения решений указанной модели.

The author undertakes an attempt to find the numerically prospective periodic solutions near two maximas of resource function in a mathematical model of animal migration. The model considering environments that vary in both space and time was applied to the description of evolution of migration [3]. In particular, the differential equation of the second order with cubic nonlinearity, negative viscosity and periodic influence was investigated. Decisions which are not, strictly speaking, periodic are found as a result, but display periodic behaviour on some circumscribed interspace. Some dependence between model parameters was revealed as well. The received results are the establishment for specification of some hypotheses about the behaviour of decisions in the model of animal migration.

Ключевые слова: математическая модель, миграции животных, периодическое решение, ресурсная функция.

Keywords: mathematical model, animal migration, periodic solution, resource function.

Под миграцией животных понимается крупномасштабное перемещение групп организмов, которые, скорее всего, являются откликами на цикличные экологические изменения окружающей среды и, прежде всего, сезонные циклы. Имеется довольно много исследований, посвященных миграции животных (например, [2]), но большинство из них относится к стационарной среде. В то же время, нестационарная среда обитания пока остается недостаточно изученной. Вероятно, это происходит по причине сложности анализа пространственных систем с воздействием, зависящим от времени.

В статье [3] предложена математическая модель эволюции миграции животных в окружающей среде, которая изменяется в пространстве и времени. Чтобы упростить ситуацию, в модели предполагаются следующие допущения:

– имеется единственный неистощимый ресурс;

– движение происходит в одном пространственном измерении;

– эффективность движения по данному направлению постоянна;

– окружающая среда не проявляет случайности ни в пространстве – ни во времени;

– воспроизводство не связано с пространством и временем и не зависит от плотности популяции;

– в популяции не учитывается возрастная структура.

Основная задача, поставленная в [3], состоит в ответе на вопрос: происходят ли эволюционные расхождения в отсутствие физиологических различий, а по причине только различий в экологических условиях? В качестве критерия в модели используется безразмерное число

$$R_d = \int_0^\infty \left[\Theta\left(x(t),t\right) - \gamma\left(\dot{x}(t)\right)\right] e^{-\delta t} dt, \qquad (1)$$

которое характеризует физическую форму индивидуума после пройденного пути $x(t)$. Наилучшие стратегии движения получаются при максимизации (1). Модель миграции представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка

$$\gamma''(\dot{x})\ddot{x} = \delta\gamma'(\dot{x}) - \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \qquad (2)$$

при условиях:

$$u^*(t) = \arg\max_u \left(\lambda u - \gamma(u)\right), \qquad (3)$$

$$\delta\lambda - \dot{\lambda} = \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \;\; \dot{x} = u^*. \qquad (4)$$

Здесь $\Theta(x,t)$ – функция распределения ресурса, $x(t)$ – позиция, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ – скорость, $\gamma(\dot{x})$ – затраты на перемещение, $u = \dot{x}$ – управляющий параметр, $\lambda(t)$ – вспомогательная функция, $\gamma' = \dfrac{d\gamma}{dx}$, δ – относительная значимость краткосрочного прироста ресурса по сравнению с долгосрочным.

Если предположить, что функцию распределения ресурса можно представить в виде суммы постоянных и периодических компонент, то характеризовать природу оптимальной стратегии можно с помощью следующих четырех параметров:

– амплитуды пространственных изменений доступности ресурса, которая состоит из среднего уровня ресурса ψ и сезонного изменения ресурса ω;

– коэффициента полезности движения γ';

– относительной значимости краткосрочного прироста ресурса по сравнению с долгосрочным δ.

Тогда, как показано в [3], оптимальные стратегии движения могут быть разделены на шесть режимов, в зависимости от относительных значений этих компонент. Мы рассмотрим подробнее режим т. н. факультативной миграции. Такой режим возникает, когда перемещение особей эффективно, т. е., если

$$\gamma' \le \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Это означает, что скорость γ' (единица стоимости / единица интервала) изменения затрат на движение не превосходит амплитуды пространственного изменения ресурса, поэтому движение может быть выгодным. Кроме того, для осуществления режима необходимо, чтобы сезонное пространственное изменение ресурса $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ было близко к среднему пространственному изменению ресурса $\frac{\partial\psi}{\partial x}$. В этой ситуации лучшими стратегиями могут оказаться факультативные перемещения, отвечающие специфическим условиям, нахождение которых не всегда просто.

Нашей целью является нахождение периодических решений в окрестностях пиков ресурсной функции. В качестве объекта исследования рассмотрим в режиме факультативной миграции следующую функцию распределения ресурса

$$\Theta(x,t) = a_0 + a_2x^2 - a_4x^4 + a_1\cos(2\pi t)x,$$

где $a_1 > 0$. Здесь $\psi(x) = a_0 + a_2x^2 - a_4x^4$ – пространственная компонента, $\omega(x,t) = a_1\cos(2\pi t)x$ – сезонная компонента. Предполагаем, что закон стоимости движения $\gamma(u)$ является параболическим $\gamma(u) = \frac{gu^2}{2}$ (g – константа). Тогда, после упрощений, уравнение (2) примет вид

$$x'' = \delta x' - a_1\cos(2\pi t) - 2a_2x + 4a_4x^3. \qquad (5)$$

Это уравнение Дюффинга. Чаще всего уравнение записывают в форме:

$$x'' + bx' + k_1x + k_2x^3 = A\cos\omega t.$$

Здесь $b > 0$ (вязкость), а коэффициенты k_1 и k_2 нелинейной возвращающей силы могут принимать различные по знаку значения. Уравнение подробно исследовалось на протяжении 100 лет как модель вынужденных нелинейных колебаний. Известно, например, что хаотические движения могут присутствовать для всех сочетаний знаков k_1 и k_2, кроме $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$ [1, с. 68 – 69]. Однако, исследования эти касались, прежде всего, приложений механики, а не экологии. Поэтому существует не так уж много работ, где уравнение Дюффинга рассматривается с отрицательной вязкостью, как в нашем случае.

Кроме того, в большинстве решений (5) возникает известное явление blow-up (в данном случае достижение бесконечности за конечное время). Чтобы преодолеть эти препятствия иногда приходится искать альтернативные варианты. Например, авторы работы [3] добавили слагаемое к функции ресурса, чтобы она имела еще два дополнительных симметричных пика. Мы здесь не применяем такой прием. Пространственная компонента $\psi(x)$ четная функция и при $a_2a_4 > 0$ имеет два локальных максимума (при $a_4 > 0$) в точках $x = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}}$ и локальный минимум в точке $x = 0$.

Основное предположение о структуре решений таково: если a_1 относительно мало, то существуют два периодических решения в окрестностях двух пиков ресурсной функции.

Проведенные нами численные расчеты обнаруживают наличие решений, которые, строго говоря, не являются периодическими. Однако, фазовая точка совершает 4-7 оборотов вокруг пиков ресурсной функции $\left(-\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}},0\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}},0\right)$ практически по одним и тем же замкнутым траекториям, прежде чем удалиться на значительное расстояние. Такие решения были обнаружены при следующих значениях параметров: $a_1 \in [0,1;\ 3,1]$, $a_2,\ a_4 \in [0,1;\ 0,8]$,

$\delta \in [0,05;\ 0,35]$.

Зависимость между амплитудой сезонного колебания a_1 и величиной $h = x(0) - \sqrt{\frac{a_2}{2a_4}}$, где $x(0)$ – начальная точка на графике периодического решения для некоторых δ представлена на рис. 1.

Чем больше сила сезонного изменения, тем дальше от соответствующего пика ресурса расположено «периодическое» решение. Так же прямо пропорционально зависит величина h от коэффициента δ. На рис. 2а приводится график «периодического» решения при $\delta = 0,2$, $a_1 = a_2 = 0,5$, $a_4 = 0,8$. Величина h при этом равна 0,0139, а абсцисса неподвижной точки $x^* = 0,559$. Решение приведено для:

$t \in [-0,2;\ 0,82]$.

На рис. 2б представлена интегральная кривая, соответствующая тому же решению при $t \in [-4;\ 8]$.

Результаты исследования приводят к следующим выводам.

1. Существуют оптимальные движения, которые происходят вокруг пиков ресурса «почти периодически», но в конечном промежутке по времени.

2. При этом амплитуда сезонного изменения ресурса может принимать значения из широкого диапазона, вопреки начальным предположениям.

3. Величина h в рассматриваемых решениях прямо пропорциональна коэффициенту δ и коэффициенту a_1 (амплитуде сезонного изменения ресурса).

4. Не удалось обнаружить решений, обходящих пик ресурса для $\delta > 0,5$.

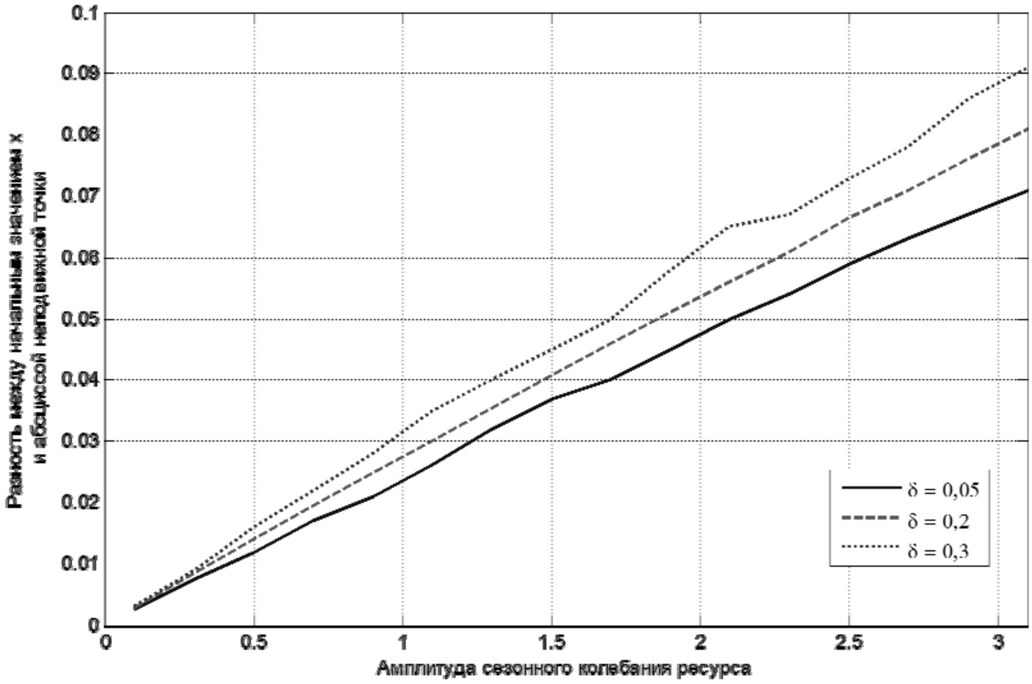

Рис. 1. ***Зависимость между амплитудой сезонного колебания ресурса***

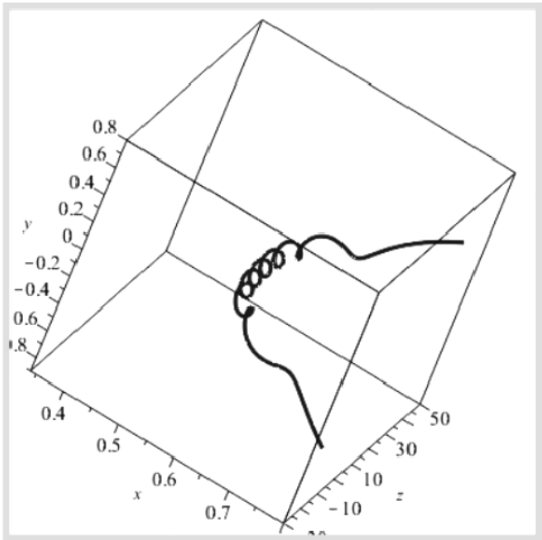

Рис. 2а

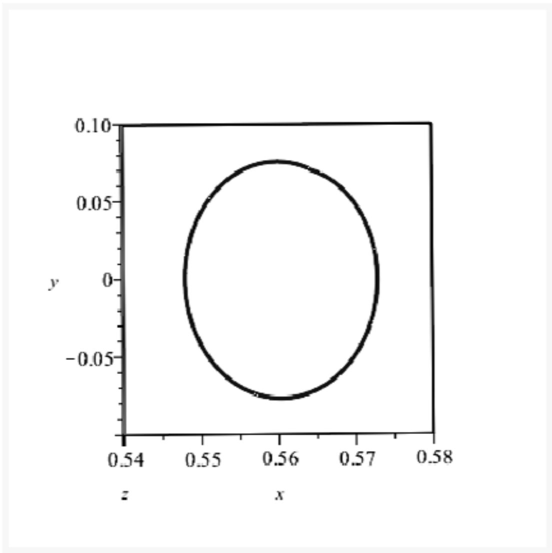

Рис. 2б

Литература

1. Спротт Дж. К. Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. 328 с.

2. Cantrell S., Cosner C. and Lou Y., Evolution of dispersal in heterogeneous landscapes, in Spatial Ecology, Chapman and Hall, 2009. P. 213 – 229.

3. Regula T. C., Shaw A. K. Optimal migratory behavior in spatially-explicit seasonal environments, Discrete and continuous dynamical system, Series B. 2014. Vol. 19. № 10. P. 3359 – 3378.

Информация об авторе:

Мачулис Владислав Владимирович – доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, mareliks@gmail.com.

Vladislav V. Machulis – Associate Professor at the Department of Mathematical Modeling, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University.

Статья поступила в редколлегию 30.04.2015 г.