

УДК 519.622

## МОДИФИЦИРОВАННАЯ ВЕРСИЯ ИНТЕГРАТОРА ГАУССА-ЭВЕРХАРТА

В. Г. Борисов

## MODIFIED VERSION OF GAUSS-EVERHART INTEGRATOR

V. G. Borisov

Представлена модифицированная версия интегратора Гаусса-Эверхарта, реализованная в среде Delphi. Для повышения эффективности численного интегрирования были использованы вещественные переменные расширенной арифметики. Добавлены интерфейсные процедуры, позволяющие использовать интерпретатор формул для ввода исходных данных и графического вывода результатов интегрирования. Проведено тестирование модифицированной версии интегратора на примере задачи двух тел.

The modified version of the Gauss-Everhart integrator realized in Delphi is developed. To increase the efficiency of numerical integration, variables of «extended» type are used. The interface procedures allowing to use a parser for input data and graphic output of results are added. Testing of the modified version of integrator on the two-body problem is held.

**Ключевые слова:** системы ОДУ, численное интегрирование, интегратор Гаусса-Эверхарта, модифицированная версия.

**Keywords:** ODE systems, numerical integration, Gauss-Everhart integrator, modified version.

В 1973 г. Э. Эверхарт [5] предложил оригинальный алгоритм численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений небесной механики. Метод Эверхарта получил широкое распространение при исследовании уравнений небесной механики, что связано с его высокой эффективностью на этом классе задач.

Метод Эверхарта является одношаговым неявным методом высокого порядка типа методов Рунге-Кутты, предназначенным для решения систем уравнений первого и второго порядков, разрешенных относительно старшей производной. Реализация метода Эверхарта для решения задачи Коши вида:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

подробно описана в [2]. Кратко идея метода состоит в следующем. На каждом шаге интегрирования, длину которого обозначим через  $h$ , дифференциальное уравнение (1) в локальной безразмерной независимой переменной  $0 \leq \tau \leq 1$  аппроксимируется формулой:

$$\frac{dx}{d\tau} = h \cdot (f^0 + \sum_{i=1}^k A_i \tau^i), \quad (2)$$

где  $k$  – некоторое натуральное число,  $f^0$  – известное значение правой части уравнения (1) при  $\tau = 0$ ,  $A_i$  – коэффициенты, подлежащие определению. Интегрирование равенства (2) по  $\tau$ , дает следующее выражение для искомой функции на рассматриваемом интервале:

$$x = x^0 + h \cdot (\tau \cdot f^0 + \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{i+1} \tau^{i+1}), \quad (3)$$

где  $x^0$  – известное значение искомой функции при  $\tau = 0$ . Далее на безразмерном интервале  $0 \leq \tau \leq 1$  зада-

ется разбиение Гаусса-Радона с узловыми точками  $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_k$ , и второе слагаемое в скобках правой части (2) представляется в виде интерполяционного многочлена Ньютона на данном разбиении с неизвестными коэффициентами  $\alpha_i, i = 1, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k A_i \tau^i &= \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau(\tau - \tau_1) + \\ &+ \alpha_3 \tau(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) + \dots \\ &+ \alpha_k \tau(\tau - \tau_1) \dots (\tau - \tau_{k-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Значения искомой функции  $x^j, j = 1, \dots, k$  в узловых точках разбиения, согласно (3) будут выражаться формулами

$$x^j = x^0 + h \cdot (\tau_j \cdot f^0 + \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{i+1} \tau_j^{i+1}). \quad (5)$$

Формулы (4), (5), а также само уравнение (1) дают неявные уравнения, связывающие величины  $x^j, A_i$  и  $\alpha_i, i, j = 0, \dots, k$ . Эти уравнения на каждом шаге интегрирования решаются итерационным методом, при этом исходными данными для итераций являются значения величин  $x^j$  и  $A_i$ , вычисленные на предыдущем шаге. Алгоритм метода и теоретическое обоснование эффективного алгоритма выбора переменного шага для данной реализации метода детально изложены в [2]. Там же приведены результаты тестирования на примере задачи двух тел программы Gauss\_15 на языке Fortran (названной автором интегратором Гаусса-Эверхарта), реализующей предложенный алгоритм.

В настоящей работе описана модифицированная версия интегратора Гаусса-Эверхарта. В качестве исходного кода для модификации был использован код бета-версии интегратора Gauss\_32\_mod (аналогичного

Gauss\_15) на языке Fortran [1]. Основными входными параметрами как исходной, так и модифицированной версии интегратора, являются размерность системы  $N$ , начальная  $TS$ , конечная  $TF$ , точки интервала интегрирования, начальное значение искомой функции и следующие параметры алгоритма:

–  $ERR$  – задаваемая точность при выборе переменного шага. В режиме переменного шага изменение, в определенных пределах, величины  $ERR$  от больших значений к меньшим, приводит к увеличению точности решения и увеличению времени интегрирования. Параметр  $ERR$  является одномерным массивом длины  $N$ .

–  $STEP$  – стартовый шаг интегрирования, при этом, если все элементы массива  $ERR$  равны нулю, то интегрирование на всем интервале проводится с постоянным шагом  $STEP$ . Если существуют ненулевые (положительные) элементы массива  $ERR$  и  $STEP=0$ , то интегрирование проводится с переменным шагом и величина стартового шага определяется автоматически с помощью итерационной процедуры, предваряющей процесс интегрирования.

–  $NOR$  – порядок интегратора. Этот параметр определяет величину  $k$  в (2) по формуле  $k = [NOR/2]$  ( $[ ]$  – целая часть числа). Здесь мы используем только нечетные значения параметра  $NOR$ .

–  $NI$  – число итераций на шаге для вычисления  $x_j^i$ ,  $A_i$  и  $\alpha_i$ . Практика показывает, что итерации сходятся достаточно быстро, и значения параметра  $NI$  больше 3 обычно не приводит к увеличению эффективности вычислений.

Выходными параметрами интегратора являются значение искомой функции в конечной точке интервала интегрирования и  $NF$  – суммарное число обращений к процедуре вычисления правой части системы уравнений (1) в течение всего процесса интегрирования. Показатель  $NF$  вместе с точностью полученного решения позволяет судить об эффективности процедуры интегрирования. Более эффективная процедура позволяет получить решение с заданной точностью при меньшем значении показателя  $NF$ .

Модификация интегратора, предпринятая автором при активном участии И.Е. Палехова [3], которому автор выражает благодарность, заключалась в нескольких моментах, речь о которых пойдет ниже.

Исходный код интегратора Gauss\_32\_mod.for был переписан на язык Pascal. Выбор языка был обоснован несколькими причинами, главной из которых является возможность использования типа данных «extended», что по сравнению с использованием переменных типа «Real\*8», в первоначальной версии программы, дает повышение точности вычислений. Кроме этого, в модифицированной версии интегратора предполагалось использование графического вывода результатов вычислений и интерпретатора формул, функционирующей в программе Diff5 [3], разработанной в среде Delphi.

Для подтверждения корректности переноса кода программы на другой язык, были проведены тесты, повторяющие тесты, приведенные в [2]. Тестирование проводилось для исходного кода на языке Fortran и двух версий модифицированного кода, скомпилированных в Lazarus и Delphi. Результаты интегрирования

тестовых задач разными версиями программы сравнивались между собой и с результатами [2]. Интегрировалась задача двух тел

$$\begin{aligned} r' &= v, & v' &= -\mu \cdot r \cdot |r|^{-3} \\ r^1(0) &= 1 - e, & r^2(0) &= 0, \\ v^1(0) &= 0, & v^2(0) &= \sqrt{(1+e)/(1-e)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $r = (r^1, r^2)$  – координаты тела,  $v = (v^1, v^2)$  – вектор его скорости,  $0 \leq e < 1$  – эксцентриситет орбиты,  $\mu > 0$  – гравитационная постоянная,

$$|r| = \sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}.$$

Известно, что решение задачи Коши (6) периодически с периодом  $2\pi/\mu$ . В связи с этим, погрешность численного решения в конечной точке интервала интегрирования, длина которого кратна периоду, можно определить, сравнивая значения решения в начальной и конечной точках интервала. Ниже для оценки погрешности решения используется величина

$$\Delta r = \sqrt{(r^1(0) - r^1(T_F))^2 + (r^2(0) - r^2(T_F))^2},$$

где через  $T_F$  обозначена конечная точка интервала интегрирования. Некоторые результаты тестирования модифицированной версии опубликованы в [4]. В качестве примера, на рис. 1 представлены диаграммы точность – быстродействие для Fortran (треугольные маркеры) и Delphi (квадратные маркеры) версий интегратора. Интегрировалась задача (6) с  $\mu = 1$  и  $e = 0,999$ . Интегрирование проводилось на интервале  $[0, 2000\pi]$  (1000 оборотов) с параметрами  $NOR = 13$ ,  $NI = 3$ ,  $STEP = 0$ . Все элементы массива  $ERR$  полагались равными между собой и величина  $ERR$  варьировалась в интервале от  $1e-5$  до  $1e-10$  с мультипликативным декрементом 3,16. Каждому значению  $ERR$  на рис. 1 соответствует точка графика с ординатой, равной точности полученного решения  $\Delta r$  и абсциссой, равной  $NF$ .

Диаграмма показывает, что при больших значениях  $ERR$  эффективность обеих версий оказывается практически одинаковой. При дальнейшем уменьшении величины  $ERR$  точность решения перестает улучшаться, и на диаграмме проявляются случайные колебания, связанные с влиянием на решение ошибок округления. Для модифицированной версии этот процесс происходит при существенно лучших значениях достигнутой точности. Диаграммы для полной погрешности решения

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^2 [(r^i(0) - r^i(T_F))^2 + (v^i(0) - v^i(T_F))^2]}$$

дают кривые, подобные приведенным на рис. 1. При использовании компилятора Lazarus существенных изменений в точности получаемых решений и величины  $NF$  обнаружено не было, лишь увеличивалось в 3–4 раза физическое время интегрирования задачи. Физическое время счета для исходной версии приближительно на 15 % лучше, чем время счета в тех же условиях той же задачи с помощью модифицированной версии, скомпилированной в Delphi.

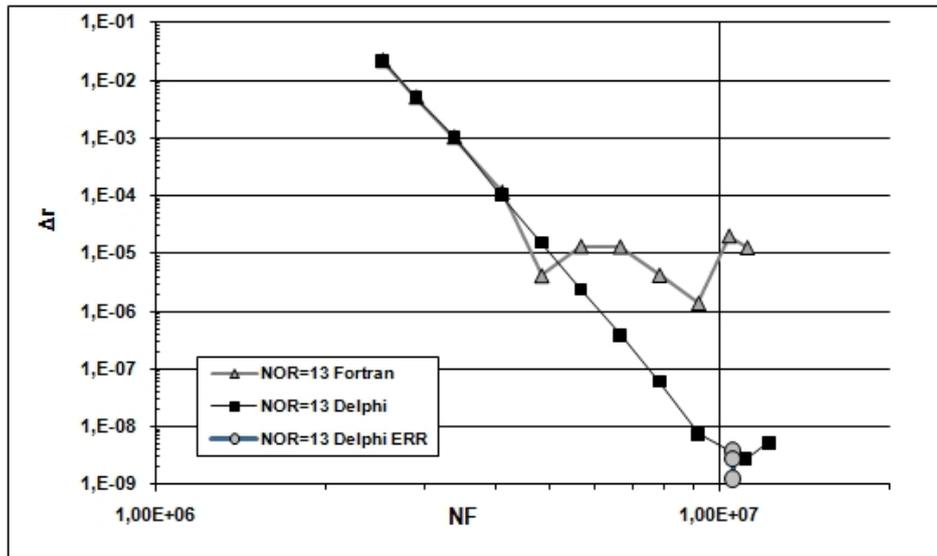


Рис. 1. Диаграммы точность – быстродействие для Fortran и Delphi версий интегратора

Результаты тестирования соответствуют результатам [2] с той лишь разницей, что достижимая точность вычислений модифицированной версии оказалась на 2 – 3 порядка выше, чем исходной, что связано с большей точностью представления чисел с плавающей точкой в расширенной арифметике.

Для модифицированной версии исследовалась зависимость от величины ERR суммарного количества несошедшихся итераций на всем интервале интегрирования, обозначенного ниже через  $I^*$ . В таблице 1 приведена зависимость величин  $\Delta r$ ,  $NF$  и  $I^*$  от ERR для задачи (6) с  $\mu = 1$ ,  $e = 0,99$  и входными параметрами  $NOR = 15$ ,  $NI = 3$ ,  $STEP = 0$ ,  $TF = 2000\pi$ . Все элементы массива ERR полагались равными между собой.

Таблица 1

Зависимость  $\Delta r$ ,  $NF$  и  $I^*$  от ERR для задачи (6)

ERR	$\Delta r$	NF	$I^*$
1,00e-09	4,09e-09	4,78e+06	1,05e+05
3,16e-10	4,51e-10	5,52e+06	2,31e+04
1,00e-10	1,91e-10	6,38e+06	5,66e+03
3,16e-11	4,51e-10	7,38e+06	7,18e+02
1,00e-11	1,28e-11	8,52e+06	1,73e+02
3,16e-12	2,50e-10	9,84e+06	4,00e+01
1,00e-12	3,08e-10	1,14e+07	1,00e+01

Данные таблицы 1 показывают монотонное возрастание  $NF$  и убывание  $I^*$  при уменьшении величины задаваемой точности ERR от  $1e-9$  до  $1e-12$ . При этом, величина  $\Delta r$ , убывая в начале интервала вариации ERR, затем переходит к упомянутым выше случайным колебаниям, вызванным влиянием ошибок округления. Таким образом, большое значение величины  $I^*$  соответствует интегрированию с точностью, не достигающей предельно возможного значения и с относительно малым значением  $NF$ , то есть с меньшим временем счета. Слишком малое значение величины  $I^*$  соответствует зоне случайных колебаний  $\Delta r$  и неоправданно большому времени счета.

В связи с этим было принято решение ввести в модифицированную версию интегратора механизм, авто-

матически изменяющий величины элементов массива ERR в соответствии с характером сходимости итераций для соответствующей компоненты решения. Действие механизма состоит в том, что в ходе последней итерации на каждом шаге формируются множители, изменяющие величины элементов массива ERR, используемых на следующем шаге. Проводились эксперименты с различными вариантами механизма. Расчеты, проведенные на задаче (6) и других задачах, показывают, что введение такого рода отрицательной обратной связи приводит к тому, что величина  $NF$  практически перестает зависеть от входных значений параметра ERR, а величина достигнутой точности колеблется в некотором диапазоне, в связи с влиянием ошибок округления. На рис. 1 положениями круглых маркеров изображены соотношения точность – быстродействие при решении задачи (6) с  $\mu = 1$  и  $e = 0,999$  на интервале  $[0, 2000\pi]$  с параметрами интегрирования  $NOR = 13$ ,  $NI = 3$ ,  $STEP = 0$ , при использовании одного из вариантов механизма автоматического изменения элементов массива ERR.

Механизм автоматического изменения ERR, очевидно, имеет смысл применять только при интегрировании с переменным шагом, при этом его действие накладывается на действие механизма изменения величины шага, исходно существующего в программе. Расчеты, проведенные на задаче (6) с разными значениями эксцентриситета показали, что изменение величины ERR не препятствует выбору оптимальной величины переменного шага в ходе интегрирования. На рис. 2 приведен график зависимости величины шага  $H$  от номера шага на одном обороте для задачи (6) с  $\mu = 1$ ,  $e = 0,99$  и входными параметрами  $NOR = 15$ ,  $NI = 3$ ,  $STEP = 0$ . На этом же рисунке приведен график зависимости от номера шага, величины, пропорциональной  $|r|^{1,5}$ . Тот факт, что эти два графика близки, означает, что при интегрировании данной задачи используются величины шагов, близкие к теоретически обоснованным в [2] оптимальным величинам. На этом же рисунке пунктирной линией приведен график зависимости величины  $ERR[2]*1e10$  от номера шага для одного из вариантов механизма автоматического изменения ERR.

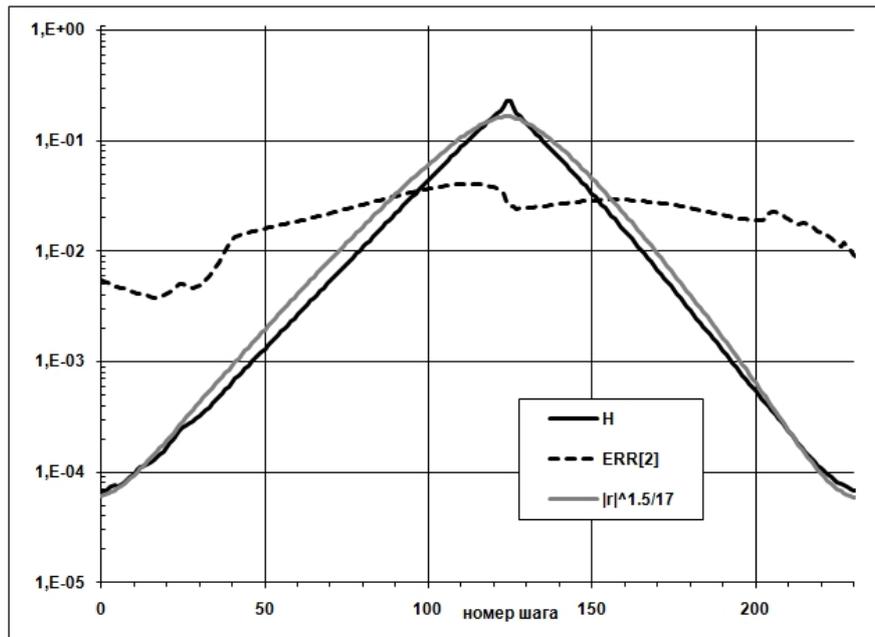


Рис. 2. Зависимость величины шага интегрирования  $H$  от номера шага на одном обороте

Влияние механизма автоматического изменения ERR также исследовалось на модельной системе, описывающей движения с различными периодами и эксцентриситетами, абстрактных, не взаимодействующих друг с другом тел в трехмерном пространстве:

$$\dot{r}_i' = v_i, \quad v_i' = -\mu_i \cdot r_i \cdot |r_i|^{-3}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (7)$$

где  $r_i = (r_i^1, r_i^2, r_i^3)$ ,  $v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)$  – координаты и векторы скорости тел,  $|r| = \sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2 + (r^3)^2}$ . Начальные условия для системы (7) и параметры  $\mu_i$  выбирались так, чтобы движения происходили в ортогональных координатных плоскостях с различными периодами  $T_i$  и эксцентриситетами  $e_i$ . Выбранные значения эксцентриситетов  $e_i$ , параметров  $\mu_i$  и соответствующих им периодов  $T_i$  приведены в таблице 2.

Таблица 2

Значения  $\mu_i$ ,  $e_i$ ,  $T_i$

$i$	$\mu_i$	$e_i$	$T_i$
1	1	0,9	$2\pi$
2	1/3	0,1	$6\pi$
3	1/7	0,99	$14\pi$
4	1/13	0,999	$26\pi$

В силу выбора в качестве  $\mu_i$  чисел, обратных к простым, минимальный период решения системы (7) с указанными параметрами и начальными условиями равняется  $546\pi$ .

На рис. 3 изображены диаграммы точность – быстроедействие для задачи (7). Линии на графиках соответствуют значениям погрешностей

$$\Delta r_i = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (r_i^j(0) - r_i^j(T_F))^2},$$

где  $T_F = 546\pi$ . Интегрирование проводилось на интервале  $[0, 546\pi]$  с входными параметрами  $NOR = 15$ ,  $NI = 3$ ,  $STEP = 0$ . Величина ERR варьировалась от  $1e-6$  до  $1e-12$  с мультипликативным декрементом 10.

Линии на рис. 3 соответствуют погрешностям  $\Delta r_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  при интегрировании без вариации ERR, значки большого размера, серого цвета – величинам  $\Delta r_i$ , полученным при интегрировании с одним из вариантов механизма автоматического изменения ERR.

Некоторые модификации кода интегратора были проведены в связи с включением интегратора в приложение Diff5 с целью использования интерфейса приложения для управления входными данными и интерпретацией результатов интегрирования.

Была добавлена опциональная возможность задания системы уравнений, параметров и начальных данных во внешнем текстовом файле определенного формата. При этом оставлена возможность задания системы дифференциальных уравнений в коде программы. Выбор этой опции управляется дополнительным входным параметром. Модифицированная версия интегратора представляет собой исполняемый файл, который с помощью встроенного в него интерпретатора формул обращается к внешнему текстовому файлу, содержащему систему уравнений, начальные условия, параметры интегрирования и другие параметры. Работа с использованием интерпретатора формул имеет существенное преимущество, заключающееся в том, что для изменения системы нет необходимости перекомпиляции кода. Расчеты, проведенные с системой, заданной в коде программы и заданной во внешнем файле, дают идентичные результаты по точности решения и величине NF, при этом время счета с интерпретатором формул оказывается значительно большим.

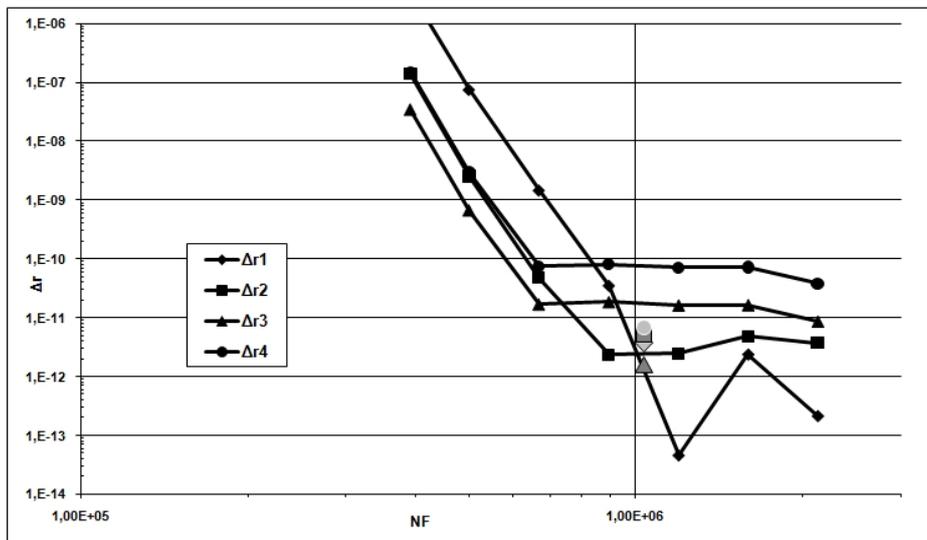


Рис. 3. Диаграммы точность – быстродействие для компонент решения задачи (7)

Была добавлена возможность выдачи результатов интегрирования в табличном и графическом видах. Для этого был использован интерфейс приложения Diff5. Для реализации возможности выдачи результатов интегрирования не только в конечной точке TF, как это сделано в исходной версии, но и в промежуточных точках, в интегратор был добавлен входной параметр *stepout*. Выдача промежуточных результатов с использованием параметра *stepout* не отражается на точности и быстродействии вычислений, поскольку дополнительных вычислений при выводе промежуточных результатов не производится. Процедура вывода промежуточных результатов состоит в том, что в ходе вычислений во вспомогательный массив выборочно записываются вычисленные значения решения на шаге, а именно, на каждом первом шаге, превышающем  $TS + n \cdot \text{stepout}$  для всех  $0 < n < (TF - TS) / \text{stepout}$ . Массив становится доступным для обработки с целью выдачи результата в табличном виде

либо в виде 2D- и 3D-графиков выбранных компонент решения по завершению процесса интегрирования.

Таким образом, тестирование модифицированной версии подтвердило адекватность переноса кода на другой язык и увеличение эффективности вычислений по сравнению с исходной версией, что связано с использованием расширенной арифметики. Тестирование различных вариантов механизма автоматического изменения величин  $ERR[i]$ , введенного в код программы, показало несущественную зависимость величины NF и точности вычислений от входных значений этих величин для исследуемого класса задач. В то же время универсального механизма, дающего увеличение эффективности вычислений на всем классе задач, обнаружено не было. Подтверждена идентичность результатов интегрирования и количества обращений к процедуре вычисления правых частей NF с использованием интерпретатора формул и без него.

#### Литература

1. Авдюшев В. А. Интегратор Гаусса-Эверхарта. Новый фортран-код // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы Всероссийской конференции. Томск, 3 – 5 октября 2006 г. Томск: Изд-во ТГУ, 2006 с. С. 411 – 412. Режим доступа: <http://www.scharmn.narod.ru/AVD/Software.htm>
2. Авдюшев В. А. Интегратор Гаусса-Эверхарта // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 4. С. 31 – 47.
3. Каков Р. Н., Ганеев Д. Р. Программа Diff4 для численного и качественного анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Материалы V Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Кемерово, 2010. Т. 2. С. 93 – 95.
4. Палехов И. Е., Борисов В. Г. Тестирование модифицированной версии интегратора Гаусса-Эверхарта // Информации в технологиях и образовании: материалы VII Международной научной конференции. Белово, 2014. Т. 2. С. 78 – 81.
5. Everhart E. A New Method for Integrating Orbits // Bulletin of the American Astronomical Society. 1973. V. 5. P. 389.

#### Информация об авторе:

**Борисов Владимир Геральдович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики КемГУ, [vbor@kuzbass.net](mailto:vbor@kuzbass.net).

**Vladimir G. Borisov** – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 23.04.2015 г.