УДК 512.541

О ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ БЕСКОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫХ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. А. Толстых

ON THE GROUPS OF THE INFINITELY GENERATED FREE ABELIAN GROUPS AUTOMORPHISMS

V. A. Tolstykh

Пусть A – бесконечно-порожденная свободная абелева группа. Мы показываем, что все автоморфизмы группы $\mathrm{Aut}(A)$ являются внутренними.

Let A be an infinitely generated free abelian group. The paper shows that all automorphisms of the group $\mathrm{Aut}(A)$ are inner.

Ключевые слова: свободные абелевы группы, бесконечно-порожденные группы, группы автоморфизмов.
Keywords: free abelian groups, infinitely generated groups, automorphism groups.

Л.-К. Хуа и И. Райнер [4] получили в 1951 году полное описание автоморфизмов группы автоморфизмов свободной абелевой группы A конечного ранга; в частности, было установлено, что индекс подгруппы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}(A))$ в группе $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(A))$ не превышает 4. Работа Хуа и Райнера стимулировала как новые результаты в описании групп автоморфизмов линейных групп над кольцами (в силу того обстоятельства, что группа A может рассматриваться как свободный $\mathbf{Z}$-модуль), так и новые результаты в описании групп автоморфизмов относительно свободных групп. В рамках последнего направления Дж. Дайер и Э. Форманек в серии работ [1 – 3] установили совершенность групп автоморфизмов ряда относительно свободных групп конечного ранга $\geqslant 2$ (к примеру, конечно-порожденных абсолютно свободных и свободных разрешимых групп; группа G называется *совершенной*, если ее центр тривиален и все её автоморфизмы являются внутренними). В серии собственных работ [6; 7; 9] автор показал, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ бесконечно-порожденной относительно свободной группы F является совершенной в случае, если группа F либо абсолютно свободна, либо является свободной нильпотетной группой ступени $\geqslant 2$, либо свободной разрешимой группой ступени $\geqslant 2$.

В настоящей работе, отталкиваясь от основного результата из работы [5] О. O'Миры, мы доказываем следующий результат, распространяющий процитированный выше результат Хуа и Райнера на бесконечно-порожденные свободные абелевы группы.

Теорема. Пусть A – *бесконечно-порожденная свободная абелева группа. Тогда все автоморфизмы группы* $\mathrm{Aut}(A)$ *являются внутренними.*

Доказательство. Обозначим через V естественным образом определенную линейную оболочку группы A над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. “Непроективная” версия теоремы 6.7 из [5] утверждает, что если $\Delta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(A))$, то найдется обратимый линейный оператор (формально, – в соответствии с указанной теоремой, – *коллинеарный* оператор) g векторного пространства V над $\mathbf{Q}$ и найдется отображение $\chi : \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{RL}(V) \cong \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, где $\mathrm{RL}(V)$ — это группа растяжений пространства V, определяемых элементами мультипликативной группы $\mathbf{Q}^*$, такие, что

$$\Delta(\sigma) = \chi(\sigma) g \sigma g^{-1} \qquad [\sigma \in \mathrm{Aut}(A)].$$

Легко видеть, что отображение χ является гомоморфизмом из группы $\mathrm{Aut}(A)$ в группу $\mathrm{RL}(V)$. Так как, далее, группа $\mathrm{Aut}(A)$ совпадает со своим коммутантом (согласно теореме 1.5 из работы [8]), то $\chi \equiv 1$, ибо всякий гомоморфизм в абелеву группу переводит коммутатор в нейтральный элемент:

$$\chi([\sigma_1, \sigma_2]) = \chi(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}) =$$
$$= \chi(\sigma_1)\chi(\sigma_2)\chi(\sigma_1)^{-1}\chi(\sigma_2^{-1}) = 1,$$

где $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Aut}(A)$. Таким образом, оператор g нормализует группу $\mathrm{Aut}(A)$:

$$g\mathrm{Aut}(A)g^{-1} = \mathrm{Aut}(A). \qquad (1)$$

Обозначим общую линейную группу GL(V)=Aut(V) векторного пространства V через G. Мы утверждаем, что $g \in Z(G)\cdot\mathrm{Aut}(A)$, то есть что g является произведением растяжения $\rho \in Z(G) = \mathrm{RL}(V)$ и элемента $\pi \in \mathrm{Aut}(A)$. В таком случае, $g\sigma g^{-1} = \pi\sigma\pi^{-1}$ для всех элементов $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$, и стало быть, Δ является на самом деле внутренним автоморфизмом группы $\mathrm{Aut}(A)$, как и утверждается в заключении теоремы.

Рассмотрим образ $g(A)$ группы A под действием оператора g. Зафиксируем базис $\{e_i : i \in I\}$ группы A. Очевидным образом, $g(A)$ является $\mathbf{Z}$-линейной оболочкой, натянутой на множество всех элементов $g(e_i)$: $g(A) = \mathrm{Span}_{\mathbf{Z}}(g(e_i) : i \in I)$.

Применяя формулу (1) выше, получаем, что группа $g(A)$ инвариантна под действием всех элементов группы $\mathrm{Aut}(A)$. Для каждого элемента i индексного множества I, выберем ненулевое целое число $k_i \in \mathbf{Z}$, для которого имеем $k_i g(e_i) \in A$, а затем унимодулярный элемент u_i группы A и целое число m_i, такие что:

$$k_i g(e_i) = m_i u_i \tag{2}$$

(напомним, что *унимодулярный элемент* данной свободной абелевой группы – это элемент, который может быть включен в некоторый базис этой группы).

Дальнейшее доказательство разбивается на два случая. Предположим сначала, что найдется пара целых чисел m_i, m_j указанного выше вида, где $i, j \in I$, которые взаимно просты и пусть f – унимодулярный элемент группы A. Будучи унимодулярным элементом группы A, элемент u_i (соотв., элемент u_j) может быть переведен в унимодулярный элемент f подходящим автоморфизмом $\sigma_i \in \mathrm{Aut}(A)$ (соотв., автоморфизмом σ_j). Поскольку целые числа m_i, m_j взаимно просты, имеем $rm_i + sm_j = 1$ для подходящих $r, s \in \mathbf{Z}$. Используя $\mathrm{Aut}(A)$ – инвариантность группы $g(A)$, получаем в таком случае, что

$$m_i f, m_j f \in g(A) \Rightarrow rm_i f + sm_j f \in g(A) \Rightarrow f \in g(A).$$

С другой стороны, наличие в группе $g(A)$ унимодулярного элемента группы A, означает, что она содержит группу $A: g(A) \geqslant A$. В таком случае, $A \geqslant g^{-1}(A)$. Очевидно, что обратный оператор g^{-1} тоже нормализует группу $\mathrm{Aut}(A)$, и потому группа $g^{-1}(A)$ является подгруппой группы A, которая инвариантна относительно всех автоморфизмов последней.

Легко видеть, однако, если подгруппа B группы A является $\mathrm{Aut}(A)$-инвариантной, то $B = mA$ для подходящего $m \in \mathbf{N}$. Действительно, пусть $B \neq \{0\}$ и пусть $\mathcal{U}(A)$ обозначает семейство всех унимодулярных элементов группы A. Тогда, положив

$$m = \min\{k \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : \exists e \in \mathcal{U}(A) \text{ т. ч. } ke \in B\},$$

немедленно получаем, что $B = mA$. Следовательно, $g^{-1}(A) = mA = \rho(m)(A)$, для некоторого натурального числа $m > 0$, где $\rho(m) \in \mathrm{RL}(V)$ обозначает растяжение пространства V, определяемое скаляром m. Следовательно, $\rho(m^{-1})g^{-1}(A) = A$, откуда $\rho(m^{-1})g^{-1} \in \mathrm{Aut}(A) \Rightarrow g \in Z(G)\cdot\mathrm{Aut}(A)$, как и утверждалось выше.

Предположим теперь, что пара различных индексов $i, j \in I$, такова, что наибольший общий делитель соответствующих чисел m_i, m_j строго больше единицы: $\gcd(m_i, m_j) = d > 1$. Отталкиваясь от равенств $m_i = dm'_j, m_j = dm'_j$, где целые числа m'_i, m'_j взаимно просты, получаем, что

$$\begin{cases} k_i g(e_i) = dm'_i u_i, \\ k_j g(e_j) = dm'_j u_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_i (1/d) g(e_i) = m'_i u_i, \\ k_j (1/d) g(e_j) = m'_j u_j. \end{cases}$$

Но в таком случае вышеприведенные рассуждения применимы к обратимому линейному оператору $h = \rho(1/d)g = \rho(d^{-1})g$, который очевидным образом нормалирует группу $\mathrm{Aut}(A)$. Следовательно, $h \in Z(G)\cdot\mathrm{Aut}(A)$, откуда $g \in Z(G)\cdot\mathrm{Aut}(A)$, что и требовалось доказать.

Автор признателен О. В. Белегредеку и М. Эмертону за полезные обсуждения.

Литература

1. Dyer J., Formanek E. The automorphism group of a free group is complete // J. London Math. Soc. 11 (1975). P. 181 – 190.
2. Dyer J., Formanek E. Automorphism sequences of free nilpotent group of class two // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976). P. 271 – 279.
3. Dyer J., Formanek E. Characteristic subgroups and complete automorphism groups // Amer. J. Math. 99 (1977). P. 713 – 753.
4. Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of the unimodular group // Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951). P. 331 – 348.
5. O'Meara O. A general isomorphism theory for linear groups // J. Algebra. 44 (1977). P. 93 – 142.
6. Tolstykh V. The automorphism tower of a free group // J. London Math. Soc. 61 (2000). P. 423 – 440.
7. Tolstykh V. Infinitely generated free nilpotent groups: completeness of the automorphism groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 147 (2009). P. 541 – 566.
8. Tolstykh V. On the Bergman property for the automorphism groups of relatively free groups // J. London Math. Soc. (2) 73 (2006). P. 669 – 680.
9. Tolstykh V. Small conjugacy classes in the automorphism groups of relatively free groups // J. Pure Appl. Algebra. 215 (2011). P. 2086 – 2098.

Информация об авторе:

Толстых Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики Стамбульского университета Арел, Стамбул, Турция, vladimirtolstykh@arel.edu.tr.

Vladimir A. Tolstykh – Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Mathematics and Informatics, Istanbul Arel University, Turkey.

Статья поступила в редколлегию 05.03.2015 г.