МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ ОДНОТЕМПЕРАТУРНОЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

STEADY FLOWS OF A BINARY MIXTURE OF VISCOUS COMPRESSIBLE HEAT CONDUCTING FLUIDS WITH COINCIDENT TEMPERATURES

A. E. Mamontov, D. A. Prokudin

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (Интеграционный проект № 30).

Рассматривается краевая задача о стационарном движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в ограниченной области. За исключением постулата о совпадении фазовых температур (физически оправданного в определенных ситуациях), не делается никаких упрощающих предположений, т. е. сохранены все слагаемые в уравнениях, являющихся естественным обобщением модели Навье-Стокса-Фурье движения однокомпонентной среды. Доказано существование слабых обобщенных решений задачи.

The paper considers the boundary value problem which describes steady motion of a binary mixture of viscous compressible heat-conductive fluids in a bounded domain. No simplifying assumptions we imposed except the postulation of coincidence of phase temperatures (which is justified in definite physical situations), i. e. the authors preserved all the terms in the equations which are a general expansion of Navier-Stokes-Fourier model describing motion of a one-constituent medium. The existence of weak solutions to the problem is proved.

Ключевые слова: стационарная краевая задача, вязкая сжимаемая теплопроводная жидкость, гомогенная двухскоростная смесь.

Keywords: steady boundary value problem, viscous compressible heat conducting fluid, homogeneous mixture with two velocities.

Введение

Данная статья продолжает исследования [3 – 5; 15]. В этих работах подробно описана постановка задачи о движении смесей вязких сжимаемых жидкостей и связанные с этим нюансы моделирования этого физического явления и математического исследования получающихся уравнений. В связи с недостатком места мы не будем повторять это описание, детали можно узнать, например, в [15]. Повторим лишь самые необходимые сведения, а также укажем место настоящей работы в этом ряду исследований. Не существует общепринятого подхода к моделированию движений многокомпонентных сред, равно как и развитой математической теории о существовании, единственности и свойствах решений начально-краевых задач, возникающих при этом моделировании. В настоящей работе выбран один из многочисленных вариантов моделирования движения двухкомпонентных (бинарных) жидкостных смесей, а именно: гомогенная смесь двух вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей, двухскоростная однотемпературная модель. Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют обе компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение, а также посредством теплообмена. С математических позиций как эта, так и многочисленные прочие модели смесей исследованы весьма мало, в том числе по сравнению с аналогичной теорией для однокомпонентных сред. Так, до недавнего времени по бинарным двухскоростным смесям имелись лишь результаты для приближенных моделей, причем без учета температур [11 – 13], а в последние годы появились работы по полной модели: сначала баротропной [3; 5], а затем теплопроводной (двухтемпературной) [4]. В последней работе имеется все же некоторое упрощение, а именно: в уравнениях энергии выброшены члены, отвечающие за вязкое трение. Это связано не только с математическими трудностями (частично возникающими и в однокомпонентном случае), но и с физической корректностью модели (подробности см. в [15]). В настоящей работе рассматривается однотемпературная модель, в которой специфические для смесей физические неувязки в диссипативных членах не возникают, и тем самым остаются только математические трудности, которые оказалось возможным преодолеть. Тем самым удается получить первый результат о математической корректности полной теплопроводной модели бинарной смеси для случая многомерных движений. В одномерном случае имеются результаты по теплопроводным смесям [7 – 8], но они касаются приближенных моделей, причем с диагональной матрицей вязкостей.

1. Постановка задачи и основной результат

Исследуемая модель смеси является естественным обобщением модели Навье-Стокса-Фурье движения однокомпонентной вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости, глубоко изученной математически в последние два десятилетия [9 – 10; 14; 19 – 20]. Для формулировки модели движения смеси как обобщения однокомпонентной модели требуются значительные усилия, отраженные, например, в [6; 21]. Возникающая при этом двухскоростная модель допускает определенные вариации. В частности, остается произвол в моделировании температурных эффектов: можно предполагать различие температур в разных составляющих смеси, а можно считать, что они совпадают. Последнее предположение используется в настоящей работе, оно оправдано в определенных физических условиях (см. об этом, например, в [1; 2]).

Пусть смесь двух вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Искомыми являются физические величины, описываемые пятью (с учетом размерностей векторов – девятью) функциями, определенными в Ω : скалярные поля плотностей $\rho_i \geq 0$ и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}^{(i)}$ для каждой компоненты смеси с номером $i = 1,2$, и скалярное поле температуры смеси $\theta > 0$. Для нахождения этих величин необходимо решить в Ω два уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

два векторных (т. е. шесть скалярных) уравнения импульсов

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} L_{ij} \mathbf{u}^{(j)} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}) + \\ +\nabla p_i = \rho_i \mathbf{f}^{(i)} + \mathbf{J}^{(i)}, \quad i = 1,2,\end{gathered} \tag{2}$$

и одно уравнение для полной энергии смеси

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i E_i \mathbf{u}^{(i)}\right) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} p_i \mathbf{u}^{(i)}\right) - \\ -\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \mathbf{f}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} - 2\operatorname{div}\mathbf{q}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{f}^{(i)}$ – внешние массовые силы; p_i – давление i -й компоненты, причем

$$p_i = \rho_i^{\gamma} + \rho_i \theta, \quad i = 1,2, \tag{4}$$

где показатель γ предполагается общим для двух компонент и достаточно большим (точные требования см. ниже), сам характер уравнения (4) является достаточно стандартным в теории Навье-Стокса – Фурье (см. например [16], [17; 18]); $\boldsymbol{J}^{(i)}$ – обмен импульсом между составляющими смеси:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}^{(i)} = (-1)^i a(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}), \\ i = 1,2, \quad a = const > 0;\end{gathered} \tag{5}$$

$\boldsymbol{q}$ – вектор потока тепла, определяемый законом Фурье

$$\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{6}$$

с коэффициентом теплопроводности, принятым в виде

$$k(\theta) = 1 + \theta^m, \tag{7}$$

где постоянная m уточняется ниже; E_i – полная удельная энергия i -й компоненты смеси:

$$E_i = \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}^{(i)}|^2 + U_i, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

причем удельная внутренняя энергия U_i задана определяющим уравнением

$$U_i = \frac{1}{\gamma - 1} \rho_i^{\gamma - 1} + \theta, \quad i = 1,2; \tag{9}$$

$\mathbb{P}^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i -й компоненты смеси:

$$\mathrm{P}^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \hat{\mathrm{P}}^{(ij)},$$

где $\hat{\mathrm{P}}^{(ij)} = \lambda_{ij} \operatorname{div}\mathbf{u}^{(j)} \mathrm{I} + 2\mu_{ij} \mathrm{D}(\mathbf{u}^{(j)}), \quad i, j = 1,2,$

(10)

в котором (постоянные) коэффициенты вязкости λ_{ij} и μ_{ij} уточняются ниже, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, а $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = ((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^T)/2$ – тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$ (индекс T означает транспонирование); наконец,

$$L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} - \mu_{ij}\Delta, \quad i, j = 1,2, \tag{11}$$

так что $\operatorname{div}\mathbb{P}^{(i)} = -\sum_{j=1}^{2} L_{ij} \boldsymbol{u}^{(j)}$, $i = 1,2$. Определяющие уравнения (4), (7) и (9) описывают термодинамику смеси, соотношения (5) и (10) выражают сформулированные выше принципы механического взаимодействия компонент, и наконец, (6) и (8) представляют собой стандартные физические законы.

Уравнения (1), (2), (3) необходимо дополнить граничными условиями, например:

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad i = 1,2, \tag{12}$$

$$2k(\theta)\nabla\theta \cdot \boldsymbol{n} + L(\theta)(\theta - \hat{\theta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{13}$$

$$\int_{\Omega} \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i = 1,2, \tag{14}$$

где положительные постоянные M_i предполагаются известными. Здесь $\boldsymbol{n}$ обозначает единичную внешнюю нормаль к $\partial\Omega$, а коэффициент граничного теплообмена

$$L(\theta) = 1 + \theta^{m-1}. \tag{15}$$

Тем самым, предмет нашего исследования сформулирован – это краевая задача (1)-(15), которую далее будем называть задачей $\mathcal{H}$.

Коэффициенты вязкостей образуют матрицы $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2$ и $M = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Важную толь играет также матрица полных вязкостей $N = \Lambda + 2M$ (с компонентами $\nu_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}$). Мы будем рассматривать случай недиагональных матриц вязкостей, в котором нет возможности прямого переноса методов, развитых в теории Навье-Стокса-Фурье однокомпонентных жидкостей. При этом из термодинамических соображений следует, что эти матрицы не могут быть произвольными (см. [15]). Мы будем предполагать следующие, близкие к минимальным, условия:

$$M > 0, \qquad 3\Lambda + 2M \geq 0, \tag{16}$$

обеспечивающие выполнение неравенств:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} L_{ij} \boldsymbol{u}^{(j)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \geq C_0 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}|^2 \, d\boldsymbol{x}$$

$$\text{и} \quad \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}^{(i)} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) \geq 0,$$

где $2C_0 = (\mu_{11}+\mu_{22}) - \sqrt{(\mu_{11}-\mu_{22})^2 + (\mu_{12}+\mu_{21})^2}$.

Отметим, что (16) влечет $N>0$. Кроме того, для упрощения применения метода эффективных вязких потоков (являющегося сердцевиной теории Навье-Стокса-Фурье) в рассматриваемом, матричном, случае, сделаем дополнительное техническое предположение о треугольности матрицы полных вязкостей:

$$\lambda_{12} + 2\mu_{12} = 0. \quad (17)$$

Целью статьи является построение слабого обобщенного решения задачи $\mathcal{H}$, которое понимается стандартно, вполне в духе теории однокомпонентных вязких газов.

Определение 1. Слабым обобщенным решением задачи $\mathcal{H}$ называются пара неотрицательных функций $\rho_i \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $i=1,2$, положительная функция $\theta \in W_2^1(\Omega) \cap L_{3m}(\Omega) \cap L_{2m}(\partial\Omega)$ и пара векторных полей $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i=1,2$, удовлетворяющие условиям (1) – (15) в следующем смысле:

($\mathcal{H}$ 1) Плотности ρ_i удовлетворяют уравнениям (1) в смысле распределений, т. е. для любых пробных функций $\psi_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполняются соответствующие интегральные тождества: $\int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i \, d\boldsymbol{x} = 0$, $i=1,2$, причем выполнены (14);

($\mathcal{H}$ 2) Скорости $\boldsymbol{u}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям (2) (см. также (4), (5), (10),(11)) в смысле распределений, т. е. для любых пробных функций $\varphi^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнены соответствующие интегральные тождества (мы их не приводим ввиду стандартности, при этом (12) выполнены в смысле функционального класса);

($\mathcal{H}$ 3) Температура θ удовлетворяет уравнению (3) (см. также (6), (7), (8),(9)) и краевому условию (13) (см. также (15)) в том смысле, что для любых пробных функций $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполнено соответствующее интегральное тождество.

Основной результат статьи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in C^2$, матрицы вязкостей удовлетворяют условиям (16) и (17), выполнены ограничения $\gamma > 3$ и $m > \frac{2}{3} \cdot \frac{6\gamma^2 - 7\gamma + 3}{2\gamma^2 - 5\gamma + 1}$; остальные числовые параметры модели (a, M_1, M_2) произвольны (положительны). Тогда для любых входных данных класса $\boldsymbol{f}^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$, $i=1,2$, $\hat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\hat{\theta} > 0$ задача $\mathcal{H}$ имеет по крайней мере одно решение в смысле Определения 1.

2. Априорные оценки решений регуляризованной задачи и ее разрешимость

Первым этапом доказательства теоремы 2, которому посвящен п. 2, состоит в построении решений регуляризованной задачи с одновременным получением оценок решений, равномерных по параметру регуляризации. Второй этап (реализованный в п. 3) будет состоять в предельном переходе по параметру регуляризации на основе полученных оценок. Упомянутая регуляризованная задача, которую будем называть задачей $\mathcal{H}_\varepsilon$, формулируется так – требуется найти функции ρ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$ и θ^ε (здесь и далее верхний индекс ε не есть степень), удовлетворяющие следующим уравнениям, краевым и дополнительным условиям, содержащим параметр $\varepsilon \in (0,1]$:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) + \varepsilon\rho_i^\varepsilon = \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i=1,2, \quad (18)$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\mathbf{u}_\varepsilon^{(j)} + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} + \\ + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) + \\ + \nabla(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \nabla(\rho_i^\varepsilon \theta_\varepsilon) = \\ = (-1)^i a(\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon \mathbf{f}^{(i)} \\ \text{в} \quad \Omega, \quad i=1,2,\end{gathered} \quad (19)$$

$$\begin{gathered}-2\operatorname{div}\left(k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\right) + \\ + \sum_{i=1}^{2}\left[\begin{aligned}&\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) + \\ &+ \rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} - \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)} : (\nabla\otimes\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)})\end{aligned}\right] = \\ = a|\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{u}_\varepsilon^{(2)}|^2 + \\ + \varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2 \quad \text{в} \quad \Omega,\end{gathered} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} = 0, \quad \nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad i=1,2, \quad (21)$$

$$\begin{gathered}2k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon \cdot \mathbf{n} + \varepsilon\ln\theta^\varepsilon + \\ + L(\theta^\varepsilon)(\theta^\varepsilon - \hat{\theta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\end{gathered} \quad (22)$$

$$\int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i=1,2, \quad (23)$$

где $\mathbb{P}_\varepsilon^{(i)} = \sum\limits_{j=1}^{2}\hat{\mathbb{P}}_\varepsilon^{(ij)}$, $\hat{\mathbb{P}}_\varepsilon^{(ij)} = \lambda_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)}\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)})$, $i,j=1,2$, а $|\Omega|$ означает лебегову меру Ω. Наряду с температурой θ^ε удобно использовать функцию $s^\varepsilon = \ln\theta^\varepsilon$.

Решение задачи $\mathcal{H}_\varepsilon$ будем строить сильное, понимая под этим следующее.

Определение 3. Сильным обобщенным решением задачи $\mathcal{H}_\varepsilon$ называются пара неотрицательных функций $\rho_i^\varepsilon \in W_p^2(\Omega)$, $i=1,2$ (где $p>3$), положительная функция $\theta^\varepsilon \in W_p^2(\Omega)$ и пара векторных полей $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \in W_p^2(\Omega)$, $i=1,2$, удовлетворяющие (23), уравнениям (18) – (20) п. в. в Ω, и условиям (21), (22) п. в. на $\partial\Omega$.

Основной результат п. 2 состоит в следующем.

Лемма 4. В условиях теоремы 2 для произвольного $\varepsilon\in(0,1]$ любое сильное решение задачи $\mathcal{H}_\varepsilon$ удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{i=1}^{2}\begin{pmatrix}\left\|\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}+\left\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{W_2^1(\Omega)}+\\+\left\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\end{pmatrix}+ \\ +\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_{3m}(\Omega)}+ \\ +\left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}+\int_{\partial\Omega}(e^{s^\varepsilon}+e^{-s^\varepsilon})d\sigma+ \\ +\left\|\nabla s^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_{2m}(\partial\Omega)}\le C_1, \tag{24}$$

где C_1 зависит (только) от $\left\|\boldsymbol{f}^{(i)}\right\|_{C(\overline{\Omega})}$, λ_{ij}, μ_{ij}, M_i $(i,j=1,2)$; $\left\|\hat\theta\right\|_{C(\partial\Omega)}$, $\min\limits_{\partial\Omega}\hat\theta$, m, γ, a и Ω (особенно важно, что C_1 не зависит от ε). При этом задача $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет по крайней мере одно сильное решение.

Доказательство леммы 4 мы не приводим ввиду того, что оно является достаточно стандартным, хотя и технически непростым. В значительной степени оно повторяет аналогичные рассуждения, использованные в предшествующих работах по смесям [3 – 5; 15], а также при исследовании теплопроводной модели однокомпонентных жидкостей (см. например [16; 17]).

3. Предельный переход $\varepsilon\to 0$. Ввиду Леммы 4 можно построить решения $(\rho_1^\varepsilon,\rho_2^\varepsilon,\theta^\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)},\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)})$ задач $\mathcal{H}_\varepsilon$ при всех $\varepsilon\in(0,1]$ в смысле определения 3 и выделить последовательность (которую мы обозначим так же) такую, что при $\varepsilon\to 0$ верно

$$\rho_i^\varepsilon \xrightarrow{w} \rho_i \quad \text{в} \quad L_{2\gamma}(\Omega),$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)} \xrightarrow{w} \mathbf{u}^{(i)} \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \quad i=1,2,$$

$$\theta^\varepsilon \xrightarrow{w} \theta \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \quad L_{3m}(\Omega)$$

$$\text{и} \quad L_{2m}(\partial\Omega), \qquad s^\varepsilon \xrightarrow{w} s \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega),$$

$$(\rho_i^\varepsilon)^\gamma \xrightarrow{w} \overline{\rho_i^\gamma} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \quad i=1,2, \tag{25}$$

и следовательно $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\to\boldsymbol{u}^{(i)}$ в $L_{q_1}(\Omega)$, $\forall q_1\in[1,6)$, $i=1,2$, $\theta^\varepsilon\to\theta$ в $L_{q_2}(\Omega)$, $\forall q_2\in[1,3m)$, $\theta^\varepsilon|_{\partial\Omega}\to\theta|_{\partial\Omega}$ в $L_{q_3}(\Omega)$, $\forall q_3\in[1,2m)$, $s^\varepsilon\to s$ в $L_{q_4}(\Omega)$, $\forall q_4\in[1,6)$, при этом очевидны соотношения $\theta=e^s$ (а значит, $\theta>0$), $\rho_i\ge 0$, $i=1,2$, и (14). Таким образом, для доказательства Теоремы 2 остается проверить выполнение интегральных тождеств из определения 1. Далее чертой сверху, так же как и в (25), будем обозначать слабый предел соответствующей (под-)последовательности.

Этап 1: предельные переходы – полный в уравнениях неразрывности и частичный в уравнениях импульсов. Умножая (18) на ρ_i^ε и интегрируя по Ω с учетом (21), ввиду (24) получаем равномерные по ε оценки для величин $\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i^\varepsilon$ в $L_2(\Omega)$, что с учетом оценок для $\nabla\rho_i^\varepsilon$, содержащихся в (24), дает $\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\to 0$ в $L_{q_5}(\Omega)$, $\forall q_5\in\left[1,\frac{6\gamma}{\gamma+3}\right)$, $i=1,2$. Теперь предельный переход в уравнениях (18) становится тривиальным, и мы приходим к пункту $\mathcal{H}$ 1 Определения 1. Умножая уравнения (19) скалярно на $\varphi^{(i)}\in C_0^\infty(\Omega)$ и интегрируя по Ω, мы получаем слабые формулировки краевых задач (19), $(21)_1$, в которых можно перейти к пределу и получить тождества, отличающиеся от приведенных в пункте $\mathcal{H}$ 2 Определения 1 только тем, что вместо выражений ρ_i^γ в них стоят $\overline{\rho_i^\gamma}$. Таким образом, для обоснования $\mathcal{H}$ 2 остается доказать равенства

$$\overline{\rho_i^\gamma}=\rho_i^\gamma, \quad i=1,2. \tag{26}$$

Этап 2: частичный предельный переход в уравнении энергии. Возьмем любую $\eta\in C^\infty(\overline{\Omega})$ и заметим, что из (18) и (21) следует соотношение:

$$\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho_i^\varepsilon|^2\eta d\mathbf{x}= \\ =\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\begin{pmatrix}-(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\eta\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}-\dfrac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot\nabla\eta- \\ -\dfrac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\eta(\rho_i^\varepsilon)^\gamma+\dfrac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\cdot\dfrac{M_i}{|\Omega|}\eta(\rho_i^\varepsilon)^{\gamma-1}+ \\ +\dfrac{1}{\gamma-1}(\rho_i^\varepsilon)^\gamma\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\eta\end{pmatrix}d\mathbf{x}. \tag{27}$$

Теперь сложим три интегральных равенства: (20) после умножения на η и интегрирования по Ω; (19) после умножения на $\varphi^{(i)}=\eta\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, интегрирования по Ω и суммирования по $i=1,2$; и (27). Эта процедура дает интегральное тождество, предельный переход в котором приводит к $\mathcal{H}$ 3 с точностью до еще не доказанных соотношений (26), которые, таким образом, остаются последним препятствием для завершения доказательства теоремы 2.

Этап 3: доказательство коммуникативных соотношений для эффективных вязких потоков. Рассмотрим так наз. эффективные вязкие потоки $F_i = p_i - \sum_{j=1}^{2}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(j)}$, $i=1,2$, соответствующие величины для регуляризованной задачи

$$F_i^\varepsilon = (\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon\theta^\varepsilon - \sum_{j=1}^{2}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(j)}, \quad i=1,2, \tag{28}$$

и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$:

$$\overline{F_i} = \overline{\rho_i^\gamma} + \rho_i\theta - \sum_{j=1}^{2}\nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(j)}, \; i=1,2.$$

Этап 3.1: предварительные построения. Будем использовать оператор Δ^{-1}, определенный как $(\Delta^{-1}v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{v(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, применяя его к функциям $v \in L_{q_6}(\Omega)$, $q_6 > 3/2$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1}: L_{q_6}(\Omega) \to W_{q_6}^2(\Omega)$, и $\Delta\circ\Delta^{-1} = I$. Нам также потребуется оператор Comm, действующий по формуле $\operatorname{Comm}(\beta,\zeta) = (\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\beta)\zeta - \beta(\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\zeta)$, о котором известно (см. [9; 14]) следующее: если $\beta_k \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_7}(\Omega)$, $\zeta_k \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_8}(\Omega)$, где $q_7^{-1} + q_8^{-1} < 1$, то $\operatorname{Comm}(\beta_k,\zeta_k) \xrightarrow{w} 0$ в $L_{q_9}(\Omega)$, где $q_9^{-1} = q_7^{-1} + q_8^{-1}$. Пусть $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$, $\omega_\varepsilon \in L_{q_6}(\Omega)$, причем

$$\omega_\varepsilon \xrightarrow{w} 0 \quad \text{в} \quad L_{q_6}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{29}$$

Тогда нетрудно получить

$$\tau(\operatorname{div}\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})\cdot\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon + \tau\omega_\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\nu_{ij}(\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon^{(j)}) \overset{\Omega,\varepsilon}{\approx} 0, \quad i=1,2, \tag{30}$$

где $\overset{\Omega,\varepsilon}{\approx}$ означает совпадение с точностью до разности, исчезающей после интегрирования по Ω и перехода к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Умножая (18) на τ, после элементарных преобразований получим тождества

$$\begin{gathered}\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}(\tau\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) = \\ = \tau\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon + \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{\tau M_i}{|\Omega|} - \tau\rho_i^\varepsilon\right) + \\ + \left[\varepsilon\rho_i^\varepsilon\nabla\tau + \nabla\Delta^{-1}\begin{pmatrix}\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\nabla\tau - 2\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\cdot \\ \cdot\nabla\tau - \varepsilon\rho_i^\varepsilon\Delta\tau\end{pmatrix}\right], \\ i=1,2.\end{gathered} \tag{31}$$

Умножая (18) на $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}/2$ и складывая с (19), получим представления

$$\begin{gathered}-\operatorname{div}\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)} = -\nabla[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \\ + \rho_i^\varepsilon\theta_\varepsilon] - \operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\otimes\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) + \\ + [(-1)^i a(\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon\mathbf{f}^{(i)}] + \\ + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\Delta\rho_i^\varepsilon - \varepsilon\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}, \quad i=1,2.\end{gathered} \tag{32}$$

Этап 3.2: предел эффективных вязких потоков, умноженных на произвольные функции. Преобразуем выражения $F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau$, пользуясь (28), (30), (31) и (32):

$$\begin{gathered}-F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau \overset{\Omega,\varepsilon}{\approx} \mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\operatorname{Comm}(\omega_\varepsilon, \tau\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}) + \\ + [(-1)^i a(\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{u}_\varepsilon^{(2)}) + \rho_i^\varepsilon\mathbf{f}^{(i)}]\tau\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon - \\ - \left[\frac{\tau}{2}(\nabla\otimes\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)})\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon + \tau\varepsilon\rho_i^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\right]\cdot\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon - \\ - \frac{\tau}{2}[(\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\omega_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}]\cdot\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon + \\ + \omega_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon^{(i)}\cdot\left[\varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{\tau M_i}{|\Omega|} - \tau\rho_i^\varepsilon\right) + \tau\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right], \\ i=1,2.\end{gathered} \tag{33}$$

При условии $q_6 > \frac{6\gamma}{4\gamma-3}$ правая часть (33) сходится к нулю слабо в $L_{1+\delta}(\Omega)$ с некоторым $\delta > 0$, поэтому

$$\int_\Omega F_i^\varepsilon\omega_\varepsilon\tau d\boldsymbol{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0, \quad i=1,2. \tag{34}$$

Этап 3.3: сильная сходимость эффективных вязких потоков и коммуникативные соотношения. Для любой компактной подобласти $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ возьмем τ такую что $\tau = 1$ на Ω_1, причем $\tau \ge 0$ в Ω. Пользуясь (29) и (34) при $q_6 = 2$, $\omega_\varepsilon = F_i^\varepsilon - \overline{F_i}$, получаем при $i=1,2$ соотношение $F_i^\varepsilon \to \overline{F_i}$ в $L_{2,loc}(\Omega)$, а значит и в $L_{q_{10}}(\Omega)$ с любым $q_{10} < 2$. Отсюда следует, что если

$z_\varepsilon \xrightarrow{w} z$ в $L_{q_{11}}(\Omega)$ с некоторым $q_{11} > 2$, то $z_\varepsilon F_i^\varepsilon \xrightarrow{w} z\overline{F_i}$ в $L_{q_{12}}(\Omega)$ с любым $q_{12} < \dfrac{2q_{11}}{2+q_{11}}$, что означает выполнение коммуникативного соотношения $\overline{zF_i} = \overline{z}\overline{F_i}$. В частности, можно взять $z_\varepsilon = \rho_j^\varepsilon$ с произвольным $j = 1,2$, $q_{11} = 2\gamma$, $q_{12} = 1$, что влечет соотношения:

$$\int_\Omega \rho_j^\varepsilon \left((\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta^\varepsilon - \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon^{(k)} \right) d\mathbf{x} \to$$

$$\to \int_\Omega \rho_j \left(\overline{\rho_i^\gamma} + \rho_i \theta - \sum_{k=1}^{2} \nu_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(k)} \right) d\mathbf{x} \qquad (35)$$

при $\varepsilon \to 0, \quad i, j = 1,2.$

Этап 4: предельный переход в давлениях. Отличие (35) от случая однокомпонентной среды состоит не только в числе соотношений (четыре вместо одного), но и в принципиально новом явлении – возникновении смешанных (разноименных) произведений $\rho_j \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(k)}$, $j \neq k$, которые, в отличие от одноименных ($j = k$), не допускают анализа с помощью уравнений неразрывности.

Этап 4.1: ренормализация и исключение $\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}$. Используя стандартную процедуру ренормализации [14], можно получить соотношения:

$$\int_\Omega \rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)} d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1,2, \qquad (36)$$

и аналогично из (18) при $\varepsilon \to 0$ выводим

$$\int_\Omega \overline{\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}} d\boldsymbol{x} \le 0, \quad i = 1,2. \qquad (37)$$

Благодаря (36) и (37) в (35) фактически присутствуют только разноименные произведения $\rho_j \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(k)}$, $j \neq k$ (хотя соотношения принимают вид неравенств). В частности, при $i = j = 1$ (35) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \overline{\rho_1(\rho_1^\gamma + \rho_1\theta - \nu_{12} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)})} d\mathbf{x} \le \\ &\le \int_\Omega \rho_1(\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta - \nu_{12} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (38)$$

Этап 4.2: доказательство (26) при $i = 1$. Ввиду монотонности функции $z \mapsto z^\gamma + z\theta$, для любой $v \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $v \ge 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \overline{\rho_1(\rho_1^\gamma + \rho_1\theta)} d\mathbf{x} \le \int_\Omega v(\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta) d\mathbf{x} + \\ &+ \int_\Omega (\rho_1 - v)(v^\gamma + v\theta) d\mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (39)$$

Вычитая (39) из (38) и полагая $v = \rho_1 + \lambda\psi$ с любыми $\psi \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $\psi \ge 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$, получаем неравенство, переходя в котором к пределу при $\lambda \to 0$ и пользуясь поточечным свойством слабых пределов $\overline{\rho_1^\gamma} \ge \rho_1^\gamma$, получаем $(\overline{\rho_1^\gamma} - \rho_1^\gamma)\psi = 0$, что ввиду произвольности ψ означает требуемое. В частности, сходимость $\rho_1^\varepsilon \to \rho_1$ сильная в $L_\gamma(\Omega)$, а значит (ввиду ограниченности в $L_{2\gamma}(\Omega)$) и в $L_{q_{13}}(\Omega)$ при всех $q_{13} \in [1, 2\gamma)$.

Этап 4.3: коммуникативное соотношение для $\rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}$. Пользуясь повторно условием (17), доказанным соотношением (26) при $i = 1$ и сильной сходимостью ρ_1^ε, мы можем записать (35) при $i = 1$, $j = 2$ в виде

$$\int_\Omega \overline{\rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}} d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \rho_2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)} d\boldsymbol{x}. \qquad (40)$$

Этап 4.4: доказательство (26) при $i = 2$. Запишем (35) при $i = j = 2$, снова пользуясь (36) и (37), но в этот раз исключим скорости, пользуясь (40). Дальнейшие рассуждения буквально повторяют этап 4.2 с заменой ρ_1 на ρ_2.

Тем самым, соотношения (26), а значит и теорема 2 доказаны.

Литература

1. Воинов О. В., Пухначев В. В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси // Прикладная механика и техническая физика. 1980. V. 21(5). С. 38 – 45.
2. Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н. Гидродинамика нефтедобычи. Алматы: КазгосИНТИ, 2001.
3. Кучер Н. А., Прокудин Д. А. Анализ разрешимости краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Вестник Кемеровского государственного университета. 2011. Вып. № 1(45). С. 32 – 38.
4. Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53(6). С. 1338 – 1353.
5. Малышенко О. В., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Разрешимость многомерных уравнений баротропного стационарного движения бинарной смеси // Вестник Кемеровского государственного университета. 2013. Вып. 2(54). С. 85 – 90.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
7. Папин А. А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Барнаул: АлтГУ, 2009.

8. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика неоднородной жидкости. Динамика сплошной среды. 1982. Т. 56. С. 105 – 121.

9. Feireisl E. Dynamics of Viscous Compressible Fluids. Oxford: Oxford University Press, 2003.

10. Feireisl E., Novotny A. Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Basel: Birkhauser, 2009

11. Frehse J., Goj S., Malek J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum // J. Appl. Math. V. 50(6). 2005. P. 527 – 541.

12. Frehse J., Goj S., Malek J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. V. 36(4). 2005. P. 1259 – 1281.

13. Frehse J., Weigant W. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // J. Appl. Math. 2008. V. 53(4). P. 319 – 345.

14. Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 2: Compressible Models. NY: Oxford University Press, 1998.

15. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // J. Methods and Applications of Analysis. 2013. V. 20(2). P. 179 – 195.

16. Mucha P. B., Pokorny M. On the steady compressible Navier-Stokes-Fourier system // J. Comm. Math. Phys. 2009. V. 288(1). P. 349 – 377.

17. Mucha P. B., Pokorny M. Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids // J. Math. Models Methods Appl. Sci. 2010. V. 20(5). P. 785 – 813.

18. Novotny A., Pokorny M. Steady compressible Navier-Stokes-Fourier system for monoatomic gas and its generalizations // J. Diff. Equations. 2011. V. 251(1). P. 270 – 315.

19. Novotny A., Straskraba I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow. NY: Oxford University Press, 2004.

20. Plotnikov P., Sokolowski J. Compressible Navier-Stokes Equations. Theory and Shape Optimization. Basel: Birkhauser, 2012.

21. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of mixtures. Singapore: World Scientific, 1995.

Информация об авторах:

Мамонтов Александр Евгеньевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, aemamont@hydro.nsc.ru.

Alexander E. Mamontov – Doctor of Physics and Mathematics, Leading Research Associate at Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS.

Прокудин Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений КемГУ, daprokudin@kemsu.ru.

Dmitry A. Prokudin – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Differential Equations, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 23.09.2014 г.